CONCOURS BLANC 2 – CORRECTION

Mardi 4 juin 2024, de 8h à 12h

• Problème 1 – Inspiré de EML 2018 E

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère également l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+y-z,\, 2y,\, -x+y+z).$$

Partie 1 – Étude de l'application f

1. Montrer que f est linéaire.

Soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et a, b deux réels. D'abord, on a

$$au + bv = (ax+bx', ay+by', az+bz') = (X,Y,Z)$$

Puis, on peut calculer que,

$$\begin{aligned} f(au+bv) &= f(X,Y,Z) \\ &= (X+Y-Z,\, 2Y,\, -X+Y+Z) \\ &= \big(ax+bx'+ay+by'-(az+bz'), 2(ay+by'), -(ax+bx')+ay+by'+az+bz'\big) \\ &= a(x+y-z,\, 2y,\, -x+y+z) + b(x'+y'-z',\, 2y',\, -x'+y'+z') \\ &= af(u)+bf(v). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est linéaire.}}$

2. Déterminer la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ canoniquement associée à l'application f.

Posons

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matrice A est bien la matrice canoniquement associée à l'application f car elle vérifie

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $A^2 = 2A$.

En effectuant le calcul matriciel, on obtient que

$$\boxed{A^2} = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \boxed{= 2A}$$

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(u) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow u = (z,0,z) \\
&\Leftrightarrow u = z \cdot (1,0,1) \\
&\Leftrightarrow u \in \operatorname{Vect}((1,0,1)).
\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1,0,1)).$$

Ainsi, $((1,0,1))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$. De plus elle contient un seul vecteur et celui-ci est non nul, donc elle est libre. Finalement, $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker}(f) \text{ est } ((1,0,1)).}$

5. En déduire le rang de f.

D'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3)$. La question précédente donne $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$ et puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on a : $\boxed{\operatorname{rg}(f) = 2.}$

6. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Notons,

$$v_1 = f(1,0,0) = (1,0,-1) \qquad \text{et} \qquad v_2 = f(0,1,0) = (1,2,1)$$

- Les vecteurs v_1 et v_2 sont dans $\operatorname{Im}(f)$.
- $\operatorname{Card}(v_1,v_2) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$ d'après la question 5.
- La famille (v_1,v_2) est libre car, pour tout $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Donc, $\boxed{(v_1,v_2) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f).}$

7. Résoudre l'équation $AX = 2X$ d'inconnue $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
AX = 2X \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y - z = 2x \\ 2y = 2y \\ -x + y + z = 2z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad -x+y-z = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = y-z \\
&\Leftrightarrow \quad X = (y-z,y,z) \\
&\Leftrightarrow \quad X = y(1,1,0) + z(-1,0,1) \\
&\Leftrightarrow \quad X \in \operatorname{vect}((1,1,0),(-1,0,1))
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 2X$ est donné par

$$\boxed{\mathrm{vect}((1,1,0),(-1,0,1))}$$

8. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Comme A est la matrice canoniquement associée à l'application f, on a

$$\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{X \in \mathbb{R}^3 | AX = 2A\} = \mathrm{vect}((1,1,0),(-1,0,1)),$$

en utilisant le résultat de la question 7. Donc, la famille $((1,1,0),(-1,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. De plus, c'est une famille libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc, la famille $((1,1,0),(-1,0,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ est de dimension 2.}}$

Partie 2 – Étude d'une base de $\mathbb{R}^3$

On pose
$$u=(1,1,0) \qquad v=(-1,0,1) \qquad w=(1,0,1)$$

9. Montrer que la famille $\mathscr{C}=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Les trois vecteurs u, v et w sont dans $\mathbb{R}^3$.
- $\mathrm{Card}(\mathscr{C})=\dim(\mathbb{R}^3)=3$
- Montrons que la famille $\mathscr{C}$ est libre. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ trois nombres réels.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^3} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0\\ -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & & & = & 0\\ & & \lambda_2+ & & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0\\ & - & \lambda_2 & & & = & 0\\ & & \lambda_2+ & & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0
\end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{C}$ est libre.

Finalement, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{C}=(u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

10. Montrer qu'il existe $(p_{i,j})_{i,j\in\{1,2,3\}}$ tel que

$$\begin{aligned}
u&=p_{1,1}e_1+p_{2,1}e_2+p_{3,1}e_3\\
v&=p_{1,2}e_1+p_{2,2}e_2+p_{3,2}e_3\\
e_1&=p_{1,3}e_1+p_{2,3}e_2+p_{3,3}e_3
\end{aligned}$$

On peut remarquer directement que

$$\boxed{u=e_1+e_2+0\cdot e_3}$$
$$\boxed{v=-e_1+0\cdot e_2+e_3}$$
$$\boxed{e_1=e_1+0\cdot e_2+e_3}$$

11. On note P la matrice définie par
$$P=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,2}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,2}\\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,2}\end{pmatrix}$$

Donner l'expression de P.

En utilisant le résultat de la question 10, on a directement que

$$\boxed{P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.}$$

12. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Soient $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
PX = B &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ x = b \\ y + z = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = a - b \\ x = b \\ 2z = a - b + c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ x = b \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} b \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour tout $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $PX = B$ a une unique solution donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et le calcul précédent montre que

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 – Calcul des puissances d'une matrice

Le but de cette partie est de calculer les puissances de la matrice A définie à la question 2. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Informatique.
    (a) On suppose la bibliothèque numpy de python chargée sous l'alias np (inutile de le faire pour toute la suite de cet exercice). Définir la matrice A en utilisant cette bibliothèque.

```python
A = np.array([ [1,1,-1] , [0,2,0] , [-1,1,1] ])
```

    (b) On rappelle que la commande np.dot(A,B) réalise le produit matriciel AB. À l'aide de cette fonction et d'une boucle, écrire un programme Python qui calcule A^{20}.

```python
B = A
for k in range(19):
        B = np.dot(A,B)
print(B)
```

14. Montrer que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effectuant les produits matriciels, on obtient que

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis en utilisant l'expression de P^{-1} trouvée à la question 12, on obtient

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, on a bien

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

15. Quel est le rang de la matrice D ?

Par définition, le rang de la matrice D est égal à la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. Donc, on a

$$\operatorname{rg}(D) = \dim(\operatorname{vect}((2,0,0),(0,2,0),(0,0,0)))$$

On a directement que

$$\operatorname{rg}(D) = \dim(\operatorname{vect}((2,0,0),(0,2,0)))$$

Or, la famille $((2,0,0),(0,2,0))$ est une famille génératrice de $\operatorname{vect}((2,0,0),(0,2,0))$ et une famille libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires). C'est donc une base de cet espace. Ainsi, on obtient

$$\boxed{\operatorname{rg}(D) = 2.}$$

16. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : « A^n = PD^nP^{-1} »$$

est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $A^0 = PD^0P^{-1}$. D'une part $A^0 = I_3$.
D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

En utilisant le fait que $D = P^{-1}AP$ et donc que $A = PDP^{-1}$, on a

$$A^{n+1} = A^n \times A = A^nPDP^{-1}.$$

Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.}$$

17. En déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme D est diagonale, on peut montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or, d'après la question 16,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Donc, en effectuant le calcul matriciel, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}}$$

• Problème 2 – Ecricome 2022 E

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

- Déterminons d'abord la limite de g en 0^+. Tout d'abord, on sait que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0^+} 2 - \frac{1}{x} = -\infty$$

On sait également que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Donc, par produit,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty.$$

Puis par composition,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \boxed{= +\infty}$$

- Déterminons ensuite la limite de g en $+\infty$. Tout d'abord, on sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$$

On sait également que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Donc, par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty.$$

Puis par composition,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \boxed{= +\infty}$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

(a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tout d'abord, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto 2x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par somme, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par,

$$\forall x > 0, \qquad h'(x) = \frac{1}{x} + 2$$

On obtient donc directement que

$$\forall x > 0, \qquad h'(x) > 0.$$

Donc, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

(b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$.

- La fonction h est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 2(a)).
- La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 2(a).

Donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur

$$\left] \lim_{x \to 0^+} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x) \right[$$

Or, on peut calculer directement par somme que

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$$

Donc, la fonction h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Or, $0 \in \mathbb{R}$.
Donc, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in]0, +\infty[\text{ tel que } h(\alpha) = 0.}$

(c) Justifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Commençons par montrer que

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1).$$

Grâce à l'expression de la fonction h, on peut calculer directement que

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0 \qquad h(1) = 1 > 0$$

Or, par construction faite à la question 2(b), $h(\alpha) = 0$. Donc, on obtient bien que

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1).$$

Puis, comme h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on obtient que

$$\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$$

(d) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$$

Tout d'abord, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (en raisonnant comme à la question 2(a)). De plus, sa dérivée est donnée par,

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall x > 0, \qquad g'(x)} &= \left(\frac{1}{x^2} \times \ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right) \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + 2x - 1\right) \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \\
&\boxed{= \tfrac{1}{x^2} h(x) g(x)}
\end{aligned}$$

(e) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question 2(d), on a,

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$$

Or,

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{x^2} > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, \qquad g(x) > 0$$

Donc, pour tout $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$. Or, h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $h(\alpha) = 0$ (où α a été définie à la question 2(b)). Donc h est négative sur $]0, \alpha[$ et h est positive sur $]\alpha, +\infty[$. On peut en déduire le tableau de signe de g' et donc le tableau de variations de g de la manière suivante.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|\| +\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites présentes dans la tableau de variations de g ont été calculée à la question 1. Le calcul de $g(\alpha)$ n'a pas été effectué. On en déduit que

- la fonction g est décroissante sur $]0, \alpha[$,
- et croissante sur $]\alpha, +\infty[$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie
$\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$u_0 \text{ existe et } u_0 > 0.$$
D'après l'énoncé, $u_0 > 0$. Et donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$u_n \text{ existe et } u_n > 0$$
On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$u_{n+1} \text{ existe et } u_{n+1} > 0$$
D'après l'énoncé, on sait que
$$u_{n+1} = g(u_n).$$
Or, $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence donc $g(u_n)$ (et donc u_{n+1} est bien défini). De plus, par propriété de l'exponentielle.
$$\forall x > 0, \qquad g(x) > 0.$$
Donc, en prenant $x = u_n$ dans cette inégalité (possible car $u_n > 0$), on obtient
$$u_{n+1} = g(u_n) > 0.$$
Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 0}$$

4. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$`u0`.

```python
import numpy as np
def suite(u0, n):
        L=[u0]
        u=u0
        for k in range(1, n+1):
                u = np.exp( (2-1/u)*np.log(u))
                L.append(u)
        return L
```

5. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.

On peut dresser le tableau de signe suivant, en regardant le signe de chacun des termes du produit.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

De ce tableau de signe, on en déduit que

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad (x-1)\ln(x) \geqslant 0}$$

et

$$\boxed{(x-1)\ln(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow x = 1.}$$

(b) Montrer que
$$\forall x > 0, \qquad \frac{g(x)}{x} \geqslant 1.$$

On pourra utiliser que, pour tout $x > 0$, $x = \exp(\ln(x))$.

Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{x} &= \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{\exp(\ln(x))} \\
&= \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) - \ln(x)\right) \\
&= \exp\left(\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) \\
&= \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)
\end{aligned}$$

Or, $x > 0$ et d'après la question 5(a), $(x-1)\ln(x) \geqslant 0$. Donc

$$\frac{(x-1)\ln(x)}{x} \geqslant 0$$

et par croissance de l'exponentielle

$$\exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right) \geqslant \exp(0).$$

Finalement, on a bien montré que

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \frac{g(x)}{x} \geqslant 1.}$$

(c) En déduire que pour tout réel > 0, on a $g(x) \geqslant x$ et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

D'après la question 5(b),
$$\forall x > 0, \qquad \frac{g(x)}{x} \geqslant 1.$$

Donc,
$$\boxed{\forall x > 0, \qquad g(x) \geqslant x,}$$

car on a multiplié l'inégalité par une quantité positive. De plus, en reprenant les calculs de la question 5(b), on a, pour tout réel $x > 0$,

$$\boxed{\frac{g(x)}{x} = 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\ln(x) = 0 \quad \boxed{\Leftrightarrow \qquad x = 1,}$$

en utilisant le résultat de la question 5(a). Donc l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution donnée par $x = 1$.

6. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question 5(c), on sait que

$$\forall x > 0, \qquad g(x) \geqslant x.$$

Si on applique l'inégalité précédente à u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui est possible car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ d'après la question 3), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad g(u_n) \geqslant u_n,$$

c'est-à-dire d'après la construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Donc, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

7. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « } u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

D'après l'énoncé, $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Et donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Premièrement, d'après la question 6, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc

$$u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant \frac{1}{2},$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Deuxièmement, d'après l'énoncé,

$$u_{n+1} = g(u_n) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right)$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant 1$. Donc, par croissance du logarithme sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\ln(u_n) \leqslant \ln(1) = 0$$

De plus, comme $u_n \geqslant \frac{1}{2}$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$2 - \frac{1}{u_n} \geqslant 0.$$

Donc,

$$\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n) \leqslant 0.$$

Donc, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(\left(2-\frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) \leqslant \exp(0),$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant 1.$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]}$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question 6) et majorée par 1 (question 7(a)). Donc, par le théorème de la convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (en passant à la limite dans l'inégalité de la question 7(a)).

(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad g(u_n) = u_{n+1}$$

Or d'après la question 7(b), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ. Donc, en tant que suite extraite,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell.$$

De plus, comme g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a aussi que

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell).$$

Donc, par unicité de la limite,

$$g(\ell) = \ell.$$

Or, on a vu à la question 5(c), que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution donnée par $x = 1$. Donc, nécessairement,

$$\ell = 1,$$

c'est-à-dire $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 1$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } u_n > 1 \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_0 > 1$$

D'après l'énoncé, $u_0 > 1$. Et donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_n > 1$$

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} > 1$$

D'après l'énoncé,

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$u_n > 1.$$

Or d'après la question 2(e), la fonction g est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$ et donc sur $]1, +\infty[$ car $\alpha < 1$ d'après la question 2(c). Donc

$$g(u_n) > g(1),$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} > 1.$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]}$$

(b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

D'après la question 6, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone,

- soit la suite est majorée et elle converge vers un réel ℓ,
- soit la suite diverge vers $+\infty$.

Or si la suite convergeait vers un réel ℓ, alors en raisonnant comme à la question 7(c), on obtiendrait que $\ell = 1$. Or, la suite étant croissante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant u_0$$

et donc en passant à la limite

$$\ell \geqslant u_0 > 1$$

Ce qui est absurde. Donc finalement, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

• Problème 3 – Ecricome 2015 E

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune $N \geqslant 3$ boules indiscernables au toucher.

- L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
- L'urne U_2 contient N boules blanches.

Partie 1 : Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire. On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ième tirage".

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

   Dans l'urne 1, il y a $N-1$ boules blanches et une boule noire. Au mieux, on obtient la boule noire au premier tirage, au pire, on tire d'abord toutes les boules blanches (ce qui prend $N-1$ tirages) et on finit par avoir obligatoire la boule noire au N-ième tirage. Et toutes les possibilités entre sont possibles. Donc

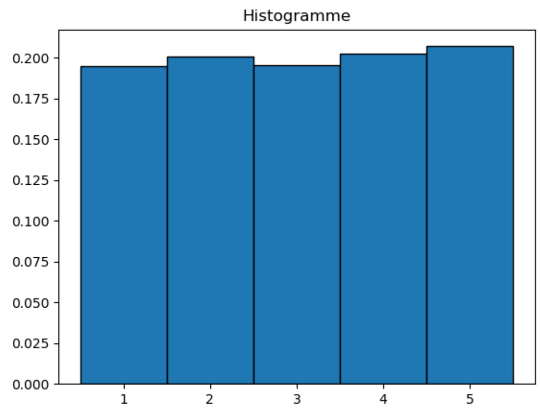
$$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$$

2. (a) On simule 10000 fois cette expérience aléatoire. Recopier et compléter les lignes 7, 10 et 12 du programme python suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire.
   On rappelle les instructions suivantes du module numpy.random sous l'alias rd :
   - `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1[$.
   - `rd.randint(a, b)` renvoie un entier aléatoire de $[a, b[$.

   On va considérer que dans l'urne 1 que la boule noire est numérotée 1 et que les boules blanches sont numérotées de 2 à N au premier tirage, puis, après tirage, de 2 à M, où M représente le nombre total de boules dans l'urne à chaque instant. Donc les boules blanches ont toujours un numéro >1.

```python
1.  import numpy as np
2.  import numpy.random as rd
3.  import matplotlib.pyplot as plt
4.
5.  N = int(input('Donner un entier naturel non nul : '))
6.  Liste = []
7.  for k in range(10000): #On effectue 10000 tirages dans l'urne
8.      i = 1 #nbre de tirages
9.      M = N #nbre de boules dans l'urne
10.     while rd.randint(1,M+1)>1: #tant qu'on obtient une boule blanche
11.         i = i+1
12.         M = M - 1
13.     Liste.append(i)
14.
15. Abscisse = np.linspace(0.5, N+0.5, N+1)
16. plt.title('Histogramme')
17. plt.hist(Liste, Abscisse, density = True, edgecolor='k')
18. plt.show()
```

   (b) On exécute le programme ci-dessus, on entre 5 au clavier et on obtient ceci :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

Dans le cas où $N=5$, il semblerait que X prenne toutes les valeurs comprises entre 1 et 5 à peu près le même nombre de fois. Donc, on conjecture que X suit une loi uniforme sur $[\![1,5]\!]$. Dans le cas général ($N \geqslant 3$ quelconque), on conjecture que X suit une loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$.

3. On se place, pour cette question seulement, dans le cas $N=5$. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

Soit $N=5$ (c'est-à-dire l'urne 1 contient 4 boules blanches et une boule noire).

- Dans un premier temps, on a
$$[X=1]=N_1$$
Donc, comme le tirage dans l'urne 1 est uniforme, on obtient que
$$P(X=1)=P(N_1)=\frac{1}{5}$$
- Puis, l'évènement $[X=2]$ correspond à tirer la boule noire au deuxième tirage, donc cela correspond à tirer une boule blanche au premier tirage puis la boule noire au deuxième tirage. On a donc
$$[X=1]=B_1\cap N_2$$
Donc, en utilisant la formule des probabilités composées,
$$P(X=1)=P(B_1\cap N_2)=P(B_1)\times P_{B_1}(N_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}.$$
- De même, on obtient que
$$P(X=2)=P(B_1\cap B_2\cap N_3)=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)\times P_{B_1\cap B_2}(N_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}.$$

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N\geqslant 3$.

4. Soit $k\in[\![1,N]\!]$.

(a) Déterminer, pour tout $i\in[\![2,k-1]\!]$,
$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(B_i)$$

Soient $k\in[\![1,N]\!]$ et $i\in[\![2,k-1]\!]$. Si l'évènement $B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}$ a eu lieu, alors que des boules blanches ont été tirées pendant les $i-1$ premiers tirages. Il reste donc $N-1-(i-1)=N-i$ boules blanches dans l'urne et 1 boule noire. Ainsi, la probabilité d'obtenir une nouvelle boule blanche à ce stade est donnée par,
$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(B_i)=\frac{N-i}{N-i+1}=\frac{N-i}{N-i+1}$$

(b) Déterminer
$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)$$

Soient $k \in [\![1,N]\!]$. Si l'évènement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ a eu lieu, alors que des boules blanches ont été tirées pendant les $k-1$ premiers tirages. Il reste donc $N-1-(k-1) = N-k$ boules blanches dans l'urne et 1 boule noire. Ainsi, la probabilité d'obtenir une boule noire à ce stade est donnée par,

$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N-k+1}$$

5. Grâce à la formule des probabilités composées, en déduire la loi de la variable aléatoire X.

Soit $k \in X(\Omega) = [\![1,N]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, en utilisant le résultat des questions 4(a) et 4(b), on a

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\
&= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1\cap B_2}(B_3) \times \cdots \times P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \cdots \times \frac{N-k+1}{N-k+2} \times \frac{1}{N-k+1} \\
&= \frac{1}{N},
\end{aligned}$$

en effectuant un télescopage. On a prouvé notre conjecture, X suit bien une loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$.

6. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

Le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire correspond à l'espérance de la variable aléatoire X. Or X suit une loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$. Donc son espérance est donnée par,
$$E(X) = \frac{N+1}{2}$$

Donc, il faut en moyenne $\frac{N+1}{2}$ tirages pour obtenir la boule noire.

Partie 2 : Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note aussi :

- U_1 l'événement "on choisit l'urne U_1".
- U_2 l'événement "on choisit l'urne U_2".

7. Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y.

On arrive à savoir dans quelle urne on est...

- ...Soit si on tire un boule noire, auquel cas, on en déduit qu'on est dans l'urne 1. Cela peut prendre entre 1 et N tirages (car il y a N-1 boules blanches et 1 boule noire).
- ...Soit si on tire que des boules blanches pendant N tirages, auquel cas, on en déduit que l'on est forcément dans l'urne 2.

Donc finalement,

$$Y = [\![1,N]\!]$$

8. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1,N]\!]$:

$$P_{U_1}(Y=j) = \frac{1}{N}.$$

Soit $j \in [\![1,N]\!]$. Si U_1 est réalisé, on sait qu'on est dans l'urne 1, dès qu'on a obtenu la boule noire. Donc, on sait qu'on est dans l'urne 2 au bout du j-ième tirage s'il faut j tirages dans l'urne 1 avant d'obtenir la boule noire. Donc

$$P_{U_1}(Y=j) = P(X=j).$$

En utilisant le résultat de la question 5, on obtient alors que

$$P_{U_1}(Y=j) = \frac{1}{N}.$$

9. Calculer $P_{U_2}(Y=j)$ pour tout entier $j \in [\![1,N]\!]$. *(On distinguera les cas $j=N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).*

Si U_2 est réalisé, on arrive à savoir qu'on est dans l'urne 2, si on tirage N fois une boule blanche et alors on sait automatiquement qu'on est dans l'urne 2. Si on tire un nombre $\leqslant N-1$ de boules blanches, on ne peut pas décréter si on est dans l'urne 1 ou dans l'urne 2. Donc,

$$\forall j \in [\![1,N-1]\!],\ P_{U_2}(Y=j) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_{U_2}(Y=N) = 1.$$

10. Montrer que :

$$\forall j \in [\![1,N]\!], \qquad P(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1,N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

Soit $j \in [\![1,N]\!]$. Comme (U_1, U_2) est un système complet d'évènements, en utilisant la formule des probabilités totales, on obtient que

$$P(Y=j) = P(U_1) \times P_{U_1}(Y=j) + P(U_2) \times P_{U_2}(Y=j)$$

Comme le choix est urne est uniforme, on a

$$P(Y=j) = \frac{1}{2} P_{U_1}(Y=j) + \frac{1}{2} P_{U_2}(Y=j)$$

Puis, en utilisant les résultats des question 8 et 9, on obtient

- Si $j \in [\![1, N-1]\!]$, alors
$$P(Y=j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2N}$$
- Si $j = N$ alors
$$P(Y=j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}$$

11. Calculer l'espérance de Y.

Comme Y est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance donnée par
$$E(Y) = \sum_{j=1}^{N} j \cdot P(Y=j).$$
En utilisant le résultat de la question 10 (et en mettant à part le terme correspondant à $j = N$ dans la somme), on a
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{N-1} j \cdot \frac{1}{2N} + N \cdot \left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N-1} j + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \\ &= \frac{1}{2N} \times \frac{(N-1)N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \\ &= \frac{N-1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} \\ &= \frac{3N+1}{4} \end{aligned}$$
Donc, l'espérance de Y est donnée par
$$E(Y) = \frac{3N+1}{4}$$