COLLE 26 - *Semaine du 01/06 au 05/06*

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours *(voir page 2).*

Chapitre 25 - Variables Aléatoires discrètes infinies

Le but de ce chapitre est de généraliser les notions vues au Chapitre 17 «Variables Aléatoires Finies» aux variables aléatoires discrètes infinies.

- Exemple de détermination de loi d'une variable aléatoire dans le cas d'un support infini
- La famille $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements.
- Transformation d'une variable aléatoire
- Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire
- Lois usuelles discrètes infinies : loi géométrique, loi de Poisson

Chapitre 26 - Intégration sur un segment

- Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue
- Interprétation graphique/lien avec l'aire algébrique
- Linéarité de l'intégrale, relation de Chasles
- Positivité et croissance de l'intégrale
- Inégalité triangulaire
- Théorème fondamental du calcul intégral
- Technique de changement de variables
- Technique d'intégration par parties

Informatique

- Calculs simples en python : `+,-,*,/,**`
- Notion de variable. Afficher une valeur avec `print`.
- Maitriser la notion d'instruction conditionnelle
- Savoir définir une fonction
- Comprendre une boucle `for`.
- Comprendre une boucle `while`.
- Savoir tracer le graphe d'une fonction ou d'une suite à l'aide de `matplotlib`
- Savoir simuler les lois usuelles (finies et infinies)
- Savoir faire tourner des algorithmes de recherche dans une liste

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice du cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). *Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.*

Un énoncé :

- ☐ Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire *(Chap 25 - Définition 2.1)*
- ☐ Donner les caractéristiques d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ (sa loi (son support + les probabilités associées), son espérance et sa variance) *(Chap 25 - Définition 3.1)*
- ☐ Donner les caractéristiques d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (sa loi (son support + les probabilités associées), son espérance et sa variance) *(Chap 25 - Définition 3.3)*

- ☐ Donner la définition de l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a,b]$ *(Chap 26 - Définition 1.1)*
- ☐ Donner la relation de Chasles *(Chap 26 - Proposition 1.7)*
- ☐ Enoncer le théorème fondamental de l'intégration *(Chap 26 - Proposition 1.16)*

Un exercice :

- ☐ On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in]0,1[$. On note X le rang d'apparition du premier Pile. Déterminer la loi de X. *(Chap 25 - Exemple 1.6 (le début))*
- ☐ Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

  $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X=k]) = (1-p)^{k-1}p$$

  La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. *(Chap 25 - Exemple 2.3)*
- ☐ On dispose de deux dés équilibrés que l'on lance en même temps une infinité de fois. On note X le nombre de lancers nécessaire à l'obtention d'un double 6. Déterminer la loi de X. En déduire son espérance et sa variance. *(Chap 25 - Exemple 3.2)*

- ☐ Calculer $I = \int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x[1+(\ln x)^2]} dx$ à l'aide du changement de variables «$t = \ln(x)$». *(Chap 26 - Exemple 2.6)*
- ☐ Calculer $I = \int_0^1 t e^{2t} dt$ à l'aide d'une intégration par parties. *(Chap 26 - Exemple 2.10)*

- ☐ Dans chacune des situations ci-dessous, identifier la loi de la variable aléatoire considérée (parmi toutes les lois usuelles) et simuler un tirage d'une telle variable aléatoire grâce à Python. *(TP 11 - Exercice 1)*
  1. On lance un dé équilibré. On note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Faire une simulation de X_1.
  2. On réalise une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant 2 boules rouges et 8 boules bleues. On note X_3 la variable aléatoire égale au rang de la première boule rouge obtenue. Faire une simulation de X_3.
  3. On considère la variable aléatoire X_8 dont la loi est donnée par

     $$X_8(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_8 = k]) = \frac{2^k \times e^{-2}}{k!}$$

     Faire une simulation de X_8.