DEVOIR SURVEILLÉ 1 - CORRECTION

Vendredi 8 septembre 2023
Durée : 2h

Exercice 1 – Vrai/Faux.

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On ne justifiera pas les réponses. Vous pouvez répondre sur votre copie ou sur le sujet.

1. Soient a et b deux nombres réels non nuls. On a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$.

☐ Vrai ☑ Faux

Contre-exemple : avec $a=b=1$,
on a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=1+1=2$ alors que $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Pour la vraie règle d'addition de fractions, voir Chapitre 1 – Proposition 2.7

2. On a $\sqrt{5^2}=5$.

☑ Vrai ☐ Faux

Voir Chapitre 1 – Proposition 4.4

3. Soit x un nombre réel. On a $3x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$.

☑ Vrai ☐ Faux

Soit x un nbre réel. On a
$3x+5=0 \Leftrightarrow 3x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$

Sinon, voir Chapitre 2 – Proposition 1.1

4. Soit x un nombre réel. On a $x^2=36 \Leftrightarrow x=6$.

☐ Vrai ☑ Faux

Soit x un nombre réel. On a
$x^2=36 \Leftrightarrow x=6$ ou $x=-6$.

Voir Chapitre 2 – Proposition 1.3

Exercice 2 – Inégalités.

Soient a, b et c trois nombres réels. Complétez les phrases suivantes avec le signe $\leqslant$ ou $\geqslant$ qui convient. On ne justifiera pas les réponses. Vous pouvez répondre sur votre copie ou sur le sujet.

1. Si $a \leqslant b$ alors $a - c \leqslant b - c$. (Chap 2 - Proposition 2.1)
2. Si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$ alors $ac \leqslant bc$. (Chap 2 - Proposition 2.4)
3. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$ alors $ac \geqslant bc$. (Chap 2 - Proposition 2.4)
4. Si $0 < a \leqslant b$ alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$. (Chap 2 - Proposition 2.8)
5. Si $a \leqslant b < 0$ alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$. (Chap 2 - Proposition 2.8)

Exercice 3 – Calculs.

1. Calculer $\frac{9}{2}+\frac{8}{22}$
2. Calculer $\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}$
3. Calculer $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{10}}$
4. Calculer $(-2)^3$
5. En écrivant $98=100-2$, calculer 98^2.
6. Écrire l'expression suivante sous la forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et de 5,

$$\frac{5^7\times 10^{-4}\times 3^9}{10^{-5}\times 3^7\times 5^{10}}.$$

1. On a
$$\frac{9}{2}+\frac{8}{22}=\frac{9\times 11}{2\times 11}+\frac{8}{22}=\frac{99}{22}+\frac{8}{22}=\frac{107}{22}$$

2. On a
$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{4\times 3}{7\times 5}=\frac{12}{35}$$

3. On a
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}\times\frac{10}{3}=\frac{20}{9}$$

4. On a
$$(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=4\times(-2)=-8$$

5. On a
$$98^2=(100-2)^2=100^2-2\times 100\times 2+2^2$$
$$=10\,000-400+4$$
$$=9\,600+4$$
$$=9\,604$$

6. On a
$$\frac{5^7\times 10^{-4}\times 3^9}{10^{-5}\times 3^7\times 5^{10}}=\frac{5^7\times 10^5\times 3^9}{10^4\times 3^7\times 5^{10}}=\frac{10\times 3^2}{5^3}=\frac{5\times 2\times 3^2}{5^3}=2\times 3^2\times 5^{-2}$$

Exercice 4 – Racines carrées.

1. Simplifier au maximum le nombre suivant $\sqrt{1300}$.
2. Simplifier au maximum le nombre suivant $\frac{\sqrt{480}}{\sqrt{2}\times\sqrt{20}}$.
3. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ est un entier.
4. Écrire le nombre suivant $\sqrt{48}+\sqrt{147}-2\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. On a

$\sqrt{1300} = \sqrt{13\times 100} = \sqrt{100}\times\sqrt{13} = 10\sqrt{13}$

2. On a

$\frac{\sqrt{480}}{\sqrt{2}\times\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{480}{2\times 20}} = \sqrt{\frac{10\times 2\times 2\times 12}{2\times 10\times 2}} = \sqrt{12} = \sqrt{3\times 4} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

3. On a

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - \frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1} \quad \text{en utilisant } (a-b)(a+b)=a^2-b^2 \text{ au dénominateur}$$
$$= \frac{2}{2-1}$$
$$= \frac{2}{1}$$
$$= 2$$

Donc $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ vaut 2 et donc est un entier naturel.

4. On a

$$\sqrt{48}+\sqrt{147}-2\sqrt{75} = \sqrt{16\times 3}+\sqrt{49\times 3}-2\sqrt{25\times 3}$$
$$= \sqrt{16}\times\sqrt{3}+\sqrt{49}\times\sqrt{3}-2\sqrt{25}\times\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3}+7\sqrt{3}-2\times 5\sqrt{3}$$
$$= 11\sqrt{3}-10\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}$$

Donc le nombre s'écrit sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a=1$ et $b=3$.

Exercice 5 – Calcul littéral.

1. Soit x un nombre réel. Développer l'expression suivante.
$$A = (6x-3)^2 + (4x-5)(4x+5)$$
2. Soit x un nombre réel. Factoriser l'expression suivante.
$$B = 9x^2 - 1 + (3x-1)(x+6)$$
3. Soit x un nombre réel. Simplifier l'expression suivante.
$$C = \frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{4}}{\frac{1}{4}}.$$
4. Soit x un nombre réel différent de 4. Simplifier l'expression suivante.
$$D = \frac{x^2-16}{x-4}.$$
5. Soit $x > 0$. Simplifier l'expression suivante.
$$E = \frac{(\sqrt{x})^5}{x^2 \times x^3}.$$
6. Pour n un entier naturel, on note $u_n = (-3)^n + 2\times 3^{n+1} - 4\times 3^n$. En factorisant l'expression, montrer que u_n vaut 3^n lorsque n est impair et vaut 3^{n+1} lorsque n est pair.

1. Soit x un nombre réel. On a :
$$\begin{aligned} A &= (6x-3)^2 + (4x-5)(4x+5) \\ &= (6x)^2 - 2\times 6x \times 3 + 3^2 + (4x)^2 - 5^2 \\ &= 36x^2 - 36x + 9 + 16x^2 - 25 \\ &= 52x^2 - 36x - 16 \end{aligned}$$

2. Soit x un nombre réel. On a :
$$\begin{aligned} B &= 9x^2 - 1 + (3x-1)(x+6) \\ &= (3x)^2 - 1 + (3x-1)(x+6) \\ &= (3x-1)(3x+1) + (3x-1)(x+6) \\ &= (3x-1)(3x+1+x+6) \\ &= (3x-1)(4x+7) \end{aligned}$$

3. Soit x un nombre réel. On a
$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{4}}{\frac{1}{4}} \\ &= \left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)\times 4 \\ &= \frac{4x}{2} + \frac{4x}{4} \\ &= 2x + x \\ &= 3x \end{aligned}$$

4. Soit x un nombre réel différent de 4. On a
$$\begin{aligned} D &= \frac{x^2-16}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} \\ &= x+4 \end{aligned}$$

5. Soit $x>0$. On a
$$\begin{aligned} E &= \frac{(\sqrt{x})^5}{x^2\times x^3} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2\times(\sqrt{x})^2\times\sqrt{x}}{x^5} \\ &= \frac{x\times x\times\sqrt{x}}{x^5} \\ &= x^{-3}\sqrt{x} \end{aligned}$$

6. Soit n un entier naturel. On a :
$$\begin{aligned} u_n &= (-3)^n + 2\times 3^{n+1} - 4\times 3^n \\ &= 3^n\times(-1)^n + 3^n\times 2\times 3 - 3^n\times 4 \\ &= 3^n\times\left((-1)^n + 6 - 4\right) \\ &= 3^n\times\left((-1)^n + 2\right) \end{aligned}$$
Donc
- si n est impair,
$$\begin{aligned} u_n &= 3^n\times(-1+2) \\ &= 3^n\times 1 \\ &= 3^n \end{aligned}$$
- et si n est pair,
$$\begin{aligned} u_n &= 3^n\times(1+2) \\ &= 3^n\times 3 \\ &= 3^{n+1} \end{aligned}$$

Exercice 6 – Résolution d'inéquations. Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{3}{(x+1)(x-2)}.$$

- les valeurs interdites sont les réels x tels que
  $x+1=0$ et $x-2=0$
  c'est-à-dire
  $x=-1$ et $x=2$.

- Soit x un nombre réel différent de -1 et de 2.
  On a

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{3}{(x+1)(x+2)} \iff \frac{x}{x+1} - \frac{3}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$$

$$\iff \frac{x\times(x-2)}{(x+1)(x-2)} - \frac{3}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$$

$$\iff \frac{x(x-2)-3}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$$

$$\iff \frac{x^2-2x-3}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$$

- On dresse le tableau de signe.
  Pour cela, on résout d'abord l'équation $x^2-2x-3=0$.
  .. on calcule le discriminant

$$\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-3)$$
$$= 4+12$$
$$= 16$$

  .. comme $\Delta>0$, l'équation $x^2-2x-3=0$ admet deux solutions données par

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

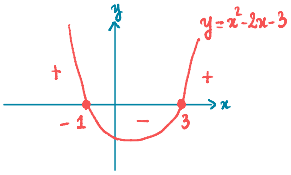
et $x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

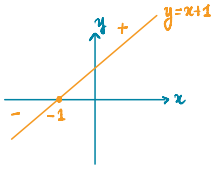
Finalement, on a :

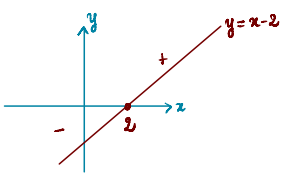
$$x^2-2x-3=0 \iff x=3 \text{ ou } x=-1$$
$$x+1=0 \iff x=-1$$
$$x-2=0 \iff x=2$$

On en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(x-2)}$		$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	







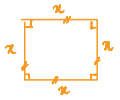
- Donc l'ensemble des solutions est donné par
  $\mathcal{S} =]2\,;\,3]$.

Exercice 7 – Avec de la modélisation.

On considère un carré de côté x cm. On suppose que si on augmente de 2 cm chaque côté de ce carré, son aire augmente de 8 cm^2. Combien vaut x ? *(On pourra faire un dessin pour comprendre l'équation que vérifie x.)*

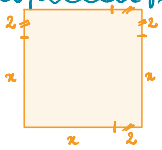
Oublions momentanément les unités.

Carré initial



Aire début = $x \times x = x^2$

Carré après transformation



Aire fin = $(x+2)(x+2)$

- Par hypothèse,
  Aire fin = Aire début + 8
  donc l'inconnue x vérifie l'équation
  $(x+2)^2 = x^2 + 8$.

- Soit x un nombre réel. On a

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 = x^2+8 &\iff x^2 + 2\times x \times 2 + 2^2 = x^2 + 8 \\
&\iff x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8 \\
&\iff 4x - 4 = 0 \\
&\iff 4x = 4 \\
&\iff x = 1
\end{aligned}$$

Finalement,
$x = 1$.

Exercice 8 – Résolution d'équations.

1. Résoudre l'équation $x^2 - x - 12 = 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

1. Résolvons $x^2 - x - 12 = 0$.

.. On calcule le discriminant

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)$$
$$= 1 + 48$$
$$= 49$$

.. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

et $x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

Vérification :
$4^2 - 4 - 12 = 16 - 16 = 0$ ✓
$(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$ ✓

L'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \{-3, 4\}$$

2. Raisonnons par analyse-synthèse.

▶ Analyse : Soit x une solution de $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Alors $X = x^2$ est solution de

$$X^2 - X - 12 = 0.$$

Donc d'après la question 1,

$$X = 4 \quad \text{ou} \quad X = -3,$$

c'est-à-dire

$$x^2 = 4 \quad \text{ou} \quad \underbrace{x^2 = -3}_{\text{impossible}}$$

c'est-à-dire

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

▶ Synthèse (Vérification)

On a $2^4 - 2^2 - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$

et $(-2)^4 - (-2)^2 - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$

Finalement, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \{-2, 2\}.$$