TD 02 – FONCTIONS USUELLES

Exercice 1 – Autour de la fonction inverse. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < 4$? *On commencera par représenter la fonction inverse pour résoudre graphiquement cette inéquation.*
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$.

Exercice 2 – Calculs algébriques avec la racine carrée. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers (avec b le plus petit possible).

   a. $\sqrt{28}+\sqrt{63}$ b. $\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}$ c. $9\sqrt{20}-5\sqrt{45}-2\sqrt{180}$

2. Montrer que le nombre suivant est un entier (à déterminer),

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

   On pourra mettre les deux fractions au même dénominateur.
3. On pose

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

   Montrer que

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi^2 = 1+\varphi.$$

Exercice 3 – Autour de la valeur absolue.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations/inéquations suivantes :

   a. $|x+3| = 3$ b. $|x-3| \geqslant 4$ c. $|7-3x| \leqslant 5$ d. $2 \leqslant |x+1| \leqslant 3$

2. Donner une expression de la fonction f sans valeur absolue, où f est définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x^2-5x+6|.$$

   On pourra commencer par dresser le tableau de signe du polynôme $x \mapsto x^2-5x+6$.
3. Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{x^n}{n}\right| \leqslant 1.$$

Exercice 4 – Autour de la fonction partie entière. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2.5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0,1[$, simplifier l'expression de f.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f.

Exercice 5 – (In)équations avec ln **et** exp**.** Relier chacune des équations et inéquations suivantes à sa solution.

$\ln(x) = -7$	$\square$	$\square$	$x \geqslant 1$
$\exp(x) = 4$	$\square$	$\square$	$x \leqslant \frac{1}{4}(e^3+1)$
$\ln(3x-1) \geqslant \ln(2)$	$\square$	$\square$	e^{-7}
$e^{-3x+5} < 2$	$\square$	$\square$	$x > -\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{5}{3}$
$\ln(4x-1) \leqslant 3$	$\square$	$\square$	$\ln(4)$

Exercice 6 – Calculs algébriques sur ln **et** exp**.** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres suivants.

   a) $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ b) $\ln(8)+5\ln(2)$ c) $\ln(\sqrt{32})$ d) $\ln(10)-\ln(20)$

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $e^5 \times e^2 \times e^{-3}$ b) $e^3 \times (e^{-4})^2$ c) $\dfrac{e^4 \times e^{-5}}{e}$ d) $\dfrac{e \times (e^5)^7}{e^{-9} \times e^4}$

3. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   a) $e^{2\ln 3+\ln 4}$ b) $e^{3\ln 2-\ln 4}$ c) $\frac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}}$

   d) $e^{3\ln 3}+e^{2\ln 7}$ e) $e^{5\ln 3} \times e^{4\ln 9}$ f) $\ln(1+e^5)+\ln\left(\frac{1}{1+e^{-5}}\right)$

4. Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité de l'expression.

   a) $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}$ b) $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$ c) $e^{2\ln(x)}$

   d) $-\ln(2x)-\ln(x)-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ e) $\sqrt{e^{2x}}e^{-x}$ f) $\frac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions A et B et factoriser les expressions C et D.

   $A = (e^{2x}+5)^2$ $B = (e^{2x}-2)(e^{-x}+5)$

   $C = 5e^{-4x}-3e^{-4x}+7e^{-4x}$ $D = e^{2x}-9x^2$

Exercice 7 – Calculs algébriques sur les puissances. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

   $A = 2^3 \times (4 \times 3)^2$ $B = \dfrac{7^7}{7^4}$ $C = \dfrac{(2^2)^3 \times 10 \times 4^{-2}}{15 \times 8}$

2. Soient n un entier naturel non nul et a un réel non nul. Montrer l'égalité suivante :

   $$\frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a}-1\right)^n = \frac{(a-1)^n}{na^n}.$$

3. Pour n un entier naturel, on note $u_n = (-3)^n + 2 \times 3^{n+1} - 4 \times 3^n$. En factorisant l'expression, montrer que u_n vaut 3^n lorsque n est impair et vaut 3^{n+1} lorsque n est pair.