1 Étude d'un polynôme

1 Généralités sur les polynômes

1.1 Définitions

Définition 1.1 On appelle **polynôme** ou **fonction polynômiale** une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où

- n est un entier naturel,
- et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels appelés **coefficients** du polynôme P,
- en particulier a_0 est appelé le **coefficient constant** du polynôme.

L'ensemble des polynômes à coefficient réels est noté $\mathbb{R}[x]$.

Exemple 1.2

Fonction	Polynôme (V/F)	Coefficient constant	Ensemble
$P_1 : x \mapsto 1 - 2x^3 + 5x^4$	Vrai	1	$P_1 \in \mathbb{R}[x]$
$P_2 : x \mapsto 0$	Vrai	0	$P_2 \in \mathbb{R}[x]$
$P_3 : x \mapsto -742x^7 + 6x^3 - 5x^2 + 2x - 3$	Vrai	-3	$P_3 \in \mathbb{R}[x]$
$P_4 : x \mapsto a$ (pour $a \in \mathbb{R}$)	Vrai	a	$P_4 \in \mathbb{R}[x]$
$P_5 : x \mapsto 3 + 2x - 51\sqrt{x}$	Faux		$P_5 \notin \mathbb{R}[x]$
$P_6 : x \mapsto 4 + 2x + x^{\frac{5}{2}}$	Faux		$P_6 \notin \mathbb{R}[x]$

Exercice 1.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ défini par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels. Que vaut $P(0)$?

On a

$$P(0) = a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0^2 + \cdots a_n \times 0^n = a_0.$$

Donc, pour toute fonction polynômiale, la valeur en 0 est donnée par le terme constant.

1.2 Opérations sur les polynômes

Proposition 1.4 Soient n et m deux entiers tel que $n < m$, P et Q deux polynômes donnés par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad \text{et} \qquad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions λP, $P + Q$ et PQ sont des polynômes. Plus précisément, on a

Multiple de P par λ	$(\lambda P) : x \mapsto \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n$
Somme de P et Q	$(P+Q) : x \mapsto a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_m x^m$
Produit de P et Q	$(PQ) : x \mapsto (a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \cdots$

Exemple 1.5 Soient P et Q deux polynômes définis par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^2 + x + 1 \qquad \text{et} \qquad Q(x) = x^3 - x + 2.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(-5Q)(x) &= -5x^3 + 5x - 10 \\
(P+Q)(x) &= x^3 + x^2 + 3 \\
(PQ)(x) &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 2) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 2
\end{aligned}$$

1.3 Degré d'un polynôme

Définition 1.6 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$ défini par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels avec $a_n \neq 0$.

- Le réel a_n est appelé le **coefficient dominant** du polynôme P.
- L'entier n est appelé le **degré** du polynôme, on note $\deg(P) = n$.

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

(!) On ne peut pas définir le degré du polynôme nul puisque tous ses coefficients sont nuls. Par convention, on pose que son degré est égal à $-\infty$.

Exemple 1.7

Polynôme	Deg	Coeff. dom.	Ensemble
$P_1 : x \mapsto 54 - 2x + 4x^5 - 112x^9$	9	-112	$P_1 \in \mathbb{R}_9[x]$ (mais aussi $P_1 \in \mathbb{R}_{10}[x]$,...)
$P_2 : x \mapsto x^2 - x^4 + 3x^3$	4	-1	$P_2 \in \mathbb{R}_4[x]$
$P_3 : x \mapsto 6$	0	6	$P_3 \in \mathbb{R}_0[x]$
$P_4 : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (pour a, b, c réels)	2	a	$P_4 \in \mathbb{R}_2[x]$
$P_5 : x \mapsto 0$	2	$-\infty$	$P_5 \in \mathbb{R}[x]$

Proposition 1.8 Soient P et Q deux polynômes non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors

- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P') = \deg(P) - 1$ (si $P \notin \mathbb{R}_0[x]$, sinon $\deg(P') = -\infty$ si $P \in \mathbb{R}_0[x]$)

(!) En général,

$$\deg(P+Q) \neq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

car les coefficients dominants peuvent s'annuler. Par exemple, considérons les polynômes P et Q donnés par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \qquad \text{et} \qquad Q(x) = -x^3.$$

Alors,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad (P+Q)(x) = x^2 + x + 1.$$

Donc

$$\deg(P+Q) = 2 \qquad \text{mais} \qquad \max(\deg(P), \deg(Q)) = 3.$$

Exemple 1.9 Soient $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ et $Q \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = x^n, \qquad B(x) = (x-1)^2, \qquad R(x) = nx + 1 - n.$$

Déterminer le degré de Q.

- **Première méthode (en utilisant la Proposition 1.8).** Le polynôme Q satisfait l'équation $B \times Q = A - R$. Donc, en identifiant les degrés de chaque côté,

$$\deg(B \times Q) = \deg(B) + \deg(Q) = \deg(A - R) \leqslant \max(\deg(A), \deg(R))$$

  On obtient donc,

$$\deg(Q) \leqslant \max(\deg(A), \deg(R)) - \deg(B) = n - 2$$

  Ainsi, le polynôme Q est de degré au plus $n-2$.
- **Première méthode (par calcul explicite).** Par définition, le polynôme Q satisfait l'égalité,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad B(x) \times Q(x) = A(x) - R(x) = x^n + nx + 1 - n$$

  Comme $n \geqslant 2$, on en déduit que le polynôme $A - R$ - et donc le polynôme $B \times Q$ est de degré n. Or,

$$\deg(B \times Q) = \deg(B) + \deg(Q) = n$$

  On en déduit que

$$\deg(Q) = n - \deg(B) = n - 2.$$

  Donc le polynôme Q est exactement de degré $n-2$.

1.4 Unicité d'un polynôme

Proposition 1.10 Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients (et de fait le même degré). En particulier, si deux polynômes sont de degré différents alors ils ne sont pas égaux.

Exemple 1.11 Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (ax^2 + bx + c)^2.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(ax^2+bx+c)^2 &= (ax^2+bx+c)(ax^2+bx+c) \\ &= a^2x^4 + abx^3 + acx^2 + abx^3 + b^2x^2 + bcx + acx^2 + bcx + c^2 \\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac+b^2)x^2 + 2bcx + c^2\end{aligned}$$

Donc, on cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ solution du système (non linéaire) suivant.

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 2 \\ (2ac+b^2) & = & 3 \\ 2bc & = & 2 \\ c^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

- Si $a = 1$, alors en regardant la deuxième équation, on trouve que $b = 1$, puis en regardant la quatrième équation, on trouve que $c = 1$. Et les autres équations sont compatibles.
- Si $a = -1$, alors en regardant la deuxième équation, on trouve que $b = -1$, puis en regardant la quatrième équation, on trouve que $c = -1$. Et les autres équations sont compatibles.

Finalement, on a trouvé deux solutions possibles :

$$(a,b,c) = (1,1,1) \qquad \text{et} \qquad (a,b,c) = (-1,-1,-1)$$

Vérification pour la solution $(1,1,1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)^2 &= (x^2+x+1)(x^2+x+1)\\ &= x^4+x^3+x^2+x^3+x^2+x+x^2+x+1\\ &= x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Exemple 1.12 Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$. On a,

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

Donc l'égalité de l'énoncé est vraie si et seulement si

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad 1 = (a+b)x+a$$

si et seulement le couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système (linéaire) suivant,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0\\ a & & & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1\\ b & = & -1\end{array}\right.$$

Finalement, on a montré que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

Vérification Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$. On a,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} \qquad \checkmark$$

2 Racines d'un polynôme

2.1 Définition

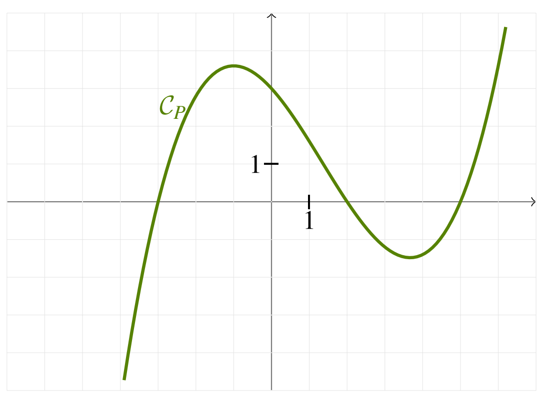
Définition 2.1 On dit qu'un réel α est une **racine** d'un polynôme P lorsque

$$P(\alpha) = 0.$$

Exemple 2.2

Polynôme	Racine(s) ?
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = (x-1)(x+3)(x+4)$	$1, 3$ et 4 sont toutes les racines de P_1
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = x^2$	0 est l'unique racine de P_2
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = 0$	P_3 admet une infinité de racines
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_4(x) = x+1$	-1 est l'unique racine de P_4
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_5(x) = x^2+1$	P_5 n'admet aucune racine
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_6(x) = (x-2)(x^3+x^2-41x-105)$	2 est une racine de P_6

Exemple 2.3 Déterminer les racines du polynôme P dont la courbe est donnée ci-dessous.



Les racines d'un polynôme correspondent aux abscisses des points où le polynôme s'annule, c'est-à-dire aux abscisses des points du plan où la courbe représentative du polynôme s'intersecte avec l'axe des abscisses. Ce polynôme admet donc trois racines données par -3, 2 et 5.

2.2 Racine d'un polynôme de degré un

Proposition 2.4 — Racine et factorisation d'un polynôme de degré un. Soit $P \in \mathbb{R}_1[x]$ un polynôme de degré un de la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = ax+b$$

où a, b sont des réels et $a \neq 0$. Alors le polynôme P admet exactement une racine réelle donnée par

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

Dans ce cas, le polynôme se factorise de la manière suivante,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a\left(x+\frac{b}{a}\right)$$

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}_1[x]$ défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax + b$ (avec a, b réels et $a \neq 0$). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a,

$$x_0 \text{ est une racine de } P \quad \Longleftrightarrow \quad P(x_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax_0 + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 = -\frac{b}{a}$$

On obtient alors la forme factorisée de P en factorisant son expression par le coefficient dominant. ■

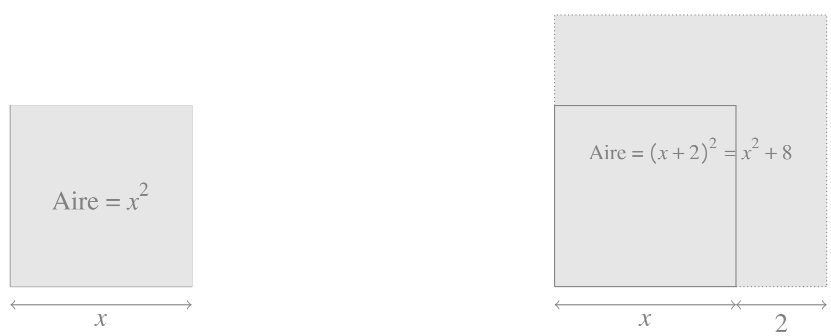
Exemple 2.5

Polynôme	Racine(s) ?	Factorisation	
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = x - 5$	Une seule racine : 5	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = 1 \times (x - 5)$	✓
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = 4x - 9$	Une seule racine : $\frac{9}{4}$	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = 4 \times \left(x - \frac{9}{4}\right)$	✓
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = 2x$	Une seule racine : 0	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = 2 \times (x - 0)$	✓
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_4(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$	Une seule racine : $-\frac{1}{2}$	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_4(x) = \frac{1}{2} \times \left(x + \frac{1}{2}\right)$	✓

Gestes Invisibles/Automatismes. On n'apprend pas la formule, on la retrouve rapidement à chaque fois pour éviter les erreurs...

Exemple 2.6 Si l'on augmente de 2 cm le côté d'un carré, son aire augmente de 8 cm^2. Quelle est la mesure du côté du carré initial ?

Gestes Invisibles/Automatismes. On commence par donner un nom à la variable que l'on cherche. Soit x la longueur du côté du carré initial. Puis on peut se représenter graphiquement la situation.



Soit x la longueur du carré initial. Alors, en calculant l'aire du nouveau carré de deux manière différentes, on trouve que x est solution de l'équation

$$(x+2)^2 = x^2 + 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1$$

Donc le carré initial est de longueur 1 cm. ✓

2.3 Trinôme du second degré

Proposition 2.7 — Racine·s et factorisation d'un polynôme de degré deux. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ un polynôme de degré deux de la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ (le discriminant).

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme P admet <u>exactement</u> deux racines réelles données par

  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  Dans ce cas, le polynôme P peut s'écrire sous la forme factorisée suivante

  $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$ alors le polynôme P admet <u>exactement</u> une racine réelle donnée par

  $$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

  Dans ce cas, le polynôme P peut s'écrire sous la forme factorisée suivante

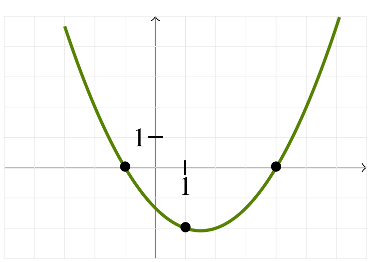
  $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$ alors le polynôme P n'admet pas de racines réelles et pas de factorisation.

Exemple 2.8

Polynôme	Racine(s)	Factorisation	
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - 5x + 6$	2 et 3	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-2)(x-3)$	✓
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 1$	Aucune	Pas de factorisation	✓
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = -x^2 + 10x - 25$	5	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = -(x-5)^2$	✓

Exemple 2.9 On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'un polynôme P de degré 2. Donner son expression.



D'après ce graphique, ce polynôme (de degré 2) admet deux racines distinctes, données par -1 et 4. Donc, on sait qu'il existe un réel a tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a(x+1)(x-4)$$

Or, d'après le graphe, on sait aussi que $P(1) = -2$ ce qui nous permet de trouver la valeur de a de la manière suivante,

$$P(1) = -2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \times 2 \times (-3) = -2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{1}{3}$$

Ainsi, l'expression du polynôme P est donnée par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-4)$$ ✓

Proposition 2.10 — Relations coefficients-racines. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ un polynôme de degré deux de la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. Supposons que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Alors P admet deux racines réelles que l'on note x_1 et x_2. Dans ce cas, on a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration. Comme le polynôme P admet deux racines distinctes (car $\Delta > 0$), il admet la factorisation suivante :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Donc, en identifiant les coefficients, on obtient que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a(x_1 + x_2) & = & b \\ ax_1x_2 & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 & = & \frac{c}{a} \end{array} \right.$$

Ce qui conclut la preuve. ■

Exemple 2.11 Résoudre le système suivant d'inconnues $(r, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} r & + & s & = & -3 \\ r & \times & s & = & 2 \end{array} \right.$$

D'après les relations coefficients-racines, r et s sont les racines du polynôme suivant

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Or P est un polynôme de degré 2, donc on obtient ces racines en étudiant son discriminant. On a $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$. Comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines données par

$$\frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2$$

Donc finalement, l'ensemble des solutions est donné par

$$\{(-1, -2), (-2, -1)\}$$

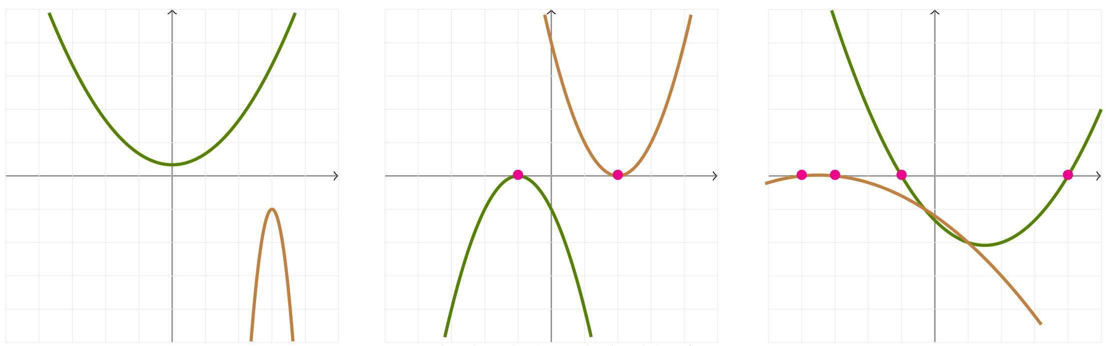
Exercice 2.12 — Python . Écrire un programme Python qui donne les racines d'un polynôme de degré deux dont le discriminant est strictement positif.

```python
import numpy as np

#On définit les coefficients du polynôme
a = 1
b = -5
c = 6

#On calcule le discriminant du polynôme
D = b**2-4*a*c

#On calcule les deux racines du polynôme
x1 = (-b+np.sqrt(D))/(-2*a)
x2 = (-b-np.sqrt(D))/(-2*a)

#On affiche le résultat
print('Les deux racines du polynôme sont', x1, 'et', x2)
```

2.4 Nombre de racines d'un polynôme

Faisons une conjecture sur le nombre possible de racines d'un polynôme en regardant les polynômes de petits degrés.

Polynôme de degré...	Nombre de racines possible	Exemple·s
$-\infty$	$+\infty$	$x \mapsto 0$
0	0	$x \mapsto 1$
1	1	$x \mapsto x+1$
2	0 ou 1 ou 2	$x \mapsto x^2+1$, $x \mapsto (x-2)^2$, $x \mapsto (x-1)(x+3)$



Exemples de polynômes de degré 2 qui n'admettent aucune racine.

Exemples de polynômes de degré 2 qui admettent chacun une unique racine.

Exemples de polynômes de degré 2 qui admettent chacun 2 racines distinctes.

Proposition 2.13 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré exactement n (avec $n \in \mathbb{N}$) Alors P possède au plus n racines.

Proposition 2.14 Un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ ayant au moins $n+1$ racines est forcément le polynôme nul.

Exercice 2.15 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant

$$\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!], \quad P(a_k) = Q(a_k).$$

Montrons que $P = Q$. *Pour cela, on peut introduire le polynôme* $R = P - Q$.

1. Déterminons le degré de R.

   Par hypothèse, comme P et Q sont dans $\mathbb{R}_n[x]$, ils sont tous les deux de degré au plus n. Ainsi,
   $$\deg(R) = \deg(P-Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(-Q)) = n.$$
   Et donc R est un polynôme de degré au plus n.

2. Déterminons les racines de R.

   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $R(a_k) = P(a_k) - Q(a_k) = 0$ par hypothèse.

   Donc R admet $n+1$ racines, données par $a_0, \dots, a_n$.

3. *Conclusion.*

   R est un polynôme de degré n admettant au moins $n+1$ racines. C'est donc forcément le polynôme nul, c'est-à-dire que $P = Q$.

3 Factorisation d'un polynôme

Proposition 3.1 Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P, c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$. Alors, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)Q(x).$$

Exemple 3.2 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ défini par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 3x^3 + 10x^2 - 3x - 10$$

1. Combien de racines le polynôme P peut-il avoir ?

   Le polynôme P est de degré 3 donc il admet au plus trois racines (il peut donc en admettre 0, 1, 2 ou 3).

2. Vérifier que 1 est une racine évidente du polynôme P.

   On a
   $$P(1) = 3 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 10 = 0$$
   Donc 1 est une racine de P.

3. Trouver un polynôme Q tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)Q(x) \tag{$\star$}$$

- **Première méthode (à la main).** D'abord, nécessairement le polynôme Q est de degré 2, donc on peut le chercher sous la forme

  $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = ax^2 + bx + c$$

  avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

  $$(x-1)Q(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

  Donc l'égalité $(\star)$ est vérifiée si et seulement si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système linéaire suivant,

  $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & & & = & 3 \\ -a & + & b & & & = & 10 \\ & - & b & + & c & = & -3 \\ & & & - & c & = & -10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 3 \\ -a+b & = & 10 \\ b & = & 13 \\ c & = & 10 \end{array}\right.$$

  Donc, le polynôme Q est donné par

  $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 3x^2 + 13x + 10$$

- **Deuxième méthode (division euclidienne, cf Section 4).** D'après l'égalité $(\star)$, le polynôme Q est le quotient de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $x \mapsto x-1$ (avec un reste nul). Ainsi, en posant la division euclidienne, on trouve,

  $$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +10x^2 & -3x & -10 & x-1 \\ \cline{5-5} -3x^3 & +3x^2 & & & 3x^2+13x+10 \\ \cline{1-2} & 13x^2 & -3x & & \\ & -13x^2 & +13x & & \\ \cline{2-3} & & 10x & -10 & \\ & & -10x & +10 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

  Donc, le polynôme Q est donné par

  $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 3x^2 + 13x + 10$$

4. Factoriser le polynôme P.

D'après la Question 2, pour factoriser P, il suffit de factoriser Q. Or Q est un polynôme du second degré, donc il suffit de regarder son discriminant. On a

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 169 - 120 = 49$$

Comme $\Delta > 0$, le polynôme Q admet deux racines réelles données par,

$$x_1 = \frac{-13 - \sqrt{49}}{2 \times 3} = -\frac{10}{3} \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{-13 + \sqrt{49}}{2 \times 3} = -1$$

Ainsi, le polynôme Q se factorise de la manière suivante

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 3(x+1)\left(x + \frac{10}{3}\right)$$

Donc le polynôme P se factorise de la manière suivante

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 3(x-1)(x+1)\left(x + \frac{10}{3}\right)$$

5. En déduire <u>toutes</u> les racines de P.

Ayant la forme factorisée de P, on en déduit toutes les racines de P de la manière suivante. <u>Soit</u> $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff 3(x-1)(x+1)\left(x + \frac{10}{3}\right) = 0 \\ &\iff \left[x - 1 = 0 \ \text{ ou } \ x + 1 = 0 \ \text{ ou } \ x + \frac{10}{3} = 0\right] \\ &\iff \left[x = 1 \ \text{ ou } \ x = -1 \ \text{ ou } \ x = -\frac{10}{3}\right] \end{aligned}$$

Donc P admet <u>exactement</u> $1, -1$ et $-\frac{10}{3}$ comme racines réelles.

Vérification On a,

$$\begin{array}{lcll} P(1) & = & 3 \times 1^3 + 10 \times 1^2 - 3 \times 1 - 10 = 0 & \checkmark \\ P(-1) & = & 3 \times (-1)^3 + 10 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) - 10 = 0 & \checkmark \\ P\left(-\frac{10}{3}\right) & = & \ldots. & \checkmark \end{array}$$

Exemple 3.3 Trouver toutes les racines du polynôme $P \in \mathbb{R}_5[x]$ défini par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^5 - 2x^3 + x$$

On peut factoriser directement le polynôme P sous la forme,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x(x^4 - 2x^2 + 1) = x(x^2 - 1)^2 = x(x-1)^2(x+1)^2$$

Donc le polynôme P admet exactement trois racines données par 0, 1 et -1.

Vérification On a,

$$\begin{array}{lcll} P(0) & = & 0^5 - 2 \times 0^3 + 0 = 0 & \checkmark \\ P(-1) & = & 1^5 - 2 \times 1^3 + 1 = 0 & \checkmark \\ P(-1) & = & (-1)^5 - 2 \times (-1)^3 - 1 = 0 & \checkmark \end{array}$$

4 Division euclidienne pour les polynômes

Pour tout couple d'entiers n et d, il existe un unique couple d'entiers q et r tels que

$$n = d \times q + r \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r < d.$$

Cela revient à trouver la quantité qu'il reste après le partage équitable le plus grand possible. Par exemple, si on veut partager équitablement 30 billes entre 7 enfants, chacun aura 4 billes et il en restera 2 :

$$30 = 7 \times 4 + 2.$$

Proposition 4.1 Pour tout couple de polynômes A et B de $\mathbb{R}[x]$, il existe un unique couple de polynômes Q et R de $\mathbb{R}[x]$ tels que

$$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Le polynôme Q s'appelle le **quotient** de la division euclidienne et le polynôme R le **reste** de la division euclidienne.

4.1 Première Méthode pour effectuer une division euclidienne : «à la main»

Illustrons la méthode directement sur un exemple. Considérons les deux polynômes A et B donnés par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 5 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 - 2.$$

Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, c'est-à-dire cherchons deux polynômes Q et R tels que

$$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

1. D'abord, déterminons le degré des polynômes Q et R.

   Comme $\deg(R) < \deg(B)$, R est de degré soit $-\infty$ (polynôme nul), soit 0, soit 1.
   De plus, l'égalité $A = B \times Q + R$ conduit à $\deg(B \times Q) = \deg(A - R)$ et donc

   $$\deg(Q) + 2 \leqslant \max(\deg(A), \deg(R)) = 3$$

   Et donc $\deg(Q) \leqslant 1$.

2. Puis cherchons les polynômes Q et R avec des coefficients indéterminés.

   Comme Q et R sont de degré au plus 1, on peut les chercher sous la forme

   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = ax + b \quad \text{et} \quad R(x) = cx + d,$$

   avec a, b, c et d des réels à trouver en injectant ses expressions dans l'équation. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

   $$\begin{aligned} (B \times Q + R)(x) &= (x^2 - 2)(ax + b) + cx + d \\ &= ax^3 + bx^2 - 2ax - 2b + cx + d \\ &= ax^3 + bx^2 + (-2a + c)x + d - 2b \end{aligned}$$

   Donc, pour que $A = B \times Q + R$, nécessairement, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ est solution de

   $$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrl} a & & & & & & = & 2 \\ b & & & & & & = & 1 \\ -2a & & & + & c & & = & -5 \\ & - & 2b & & & + \; d & = & 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} a & = & 2 \\ b & = & 1 \\ c & = & -1 \\ d & = & 7 \end{array} \right.$$

3. On peut alors conclure (et vérifier !).

   Finalement, on obtient que

   $$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

   avec Q et R définis par,

   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad R(x) = -x + 7.$$

Vérification. On a deux conditions à vérifier.

$$\deg(R) = 1 < \deg(B) = 2 \qquad \checkmark$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad B(x)\times Q(x)+R(x) = (x^2-2)\times(2x+1)-x+7 = 2x^3+x^2-5x+5 = A(x) \quad \checkmark$$

4.2 Deuxième Méthode pour effectuer une division euclidienne : «en posant la division»

Comme pour les entiers, on peut aussi «poser la division» pour trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de deux polynômes. Par exemple, considérons les deux polynômes A et B donnés par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = 6x^3-2x^2+x+3 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2-x+1$$

Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, c'est-à-dire cherchons deux polynômes Q et R tels que

$$A = B\times Q+R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

En posant la division euclidienne, on obtient,

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -2x^2 & +x & +3 & x^2-x+1 \\
\cline{5-5}
-6x^3 & +6x^2 & -6x & & 6x+4 \\
\cline{1-3}
 & 4x^2 & -5x & +3 & \\
 & -4x^2 & +4x & -4 & \\
\cline{2-4}
 & & -x & -1 &
\end{array}$$

Finalement, on obtient que

$$A = B\times Q+R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

avec Q et R définis par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 6x+4 \quad \text{et} \quad R(x) = -x-1$$

Vérification. On a deux conditions à vérifier.

$$\deg(R) = 1 < \deg(B) = 2 \qquad \checkmark$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad B(x)\times Q(x)+R(x) = (x^2-x+1)(6x+4)-x-1 = 6x^3-2x^2+x+3 = A(x) = A(x) \quad \checkmark$$

Exercice Type Concours 4.2 — EDHEC 2003, Maths S. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, défini par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-1)^2(x-2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier de l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n, R_n) \in R[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = P(x) \times Q_n(x) + R_n(x)$$

2. On admet qu'il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$

   Montrer que

$$a_n = 1, \qquad b_n = n, \qquad c_n = 2^n - n - 1$$

1. **Gestes Invisibles/Automatismes.** On investigue une égalité de la forme $A = PQ + R$, il y a forcément une histoire de division euclidienne là-dessous...
   Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant la *division euclidienne* du polynôme $x \mapsto x^n$ par le polynôme P, on sait qu'il existe un unique couple de polynôme Q_n et R_n (de $\mathbb{R}[x]$) tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = P(x) \times Q_n(x) + R_n(x) \qquad \text{avec} \qquad \deg(R_n) < \deg(P) = 3$$

   En reformulant, R_n est au plus de degré 2, c'est-à-dire $R_n \in \mathbb{R}_2[x]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.On cherche le polynôme R_n sous la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$

   Par définition, le polynôme R_n vérifie l'égalité

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = P(x) \times Q_n(x) + R_n(x)$$

   c'est-à-dire les coefficients a_n, b_n et c_n vérifient l'égalité

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad x^n = (x-1)^2(x-2) \times Q_n(x) + a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2 \qquad (\star)$$

   - En prenant $x = 1$ dans l'égalité $(\star)$, on obtient,

$$1 = a_n$$

   - En prenant $x = 2$ dans l'égalité $(\star)$, on obtient,

$$2^n = a_n + b_n + c_n = 1 + b_n + c_n$$

   - En dérivant l'égalité $(\star)$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} nx^{n-1} = 2(x-1) \times (x-2) \times Q_n(x) + (x-1)^2 \times Q_n(x) + (x-1)^2 \times (x-2) \times Q_n'(x) \\ + b_n + 2c_n(x-1) \end{aligned}$$

     En prenant $x = 1$ dans cette égalité, on obtient,

$$n = b_n$$

     Donc finalement, on obtient que,

$$a_n = 1, \qquad b_n = n, \qquad c_n = 2^n - n - 1$$