TD 01 – Polynômes

Exercice 1 – Opérations sur les polynômes. Soient P et Q deux polynômes définis par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5 \qquad \text{et} \qquad Q(x) = x^2 - 7x + 1$$

1. Pour les deux polynômes P et Q, donner :
   - leur coefficient constant,
   - leur degré,
   - leur coefficient dominant,
   - un entier n tels qu'ils appartiennent à $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Sans faire de calculs, donner une information sur le degré des polynômes suivants :

$$\text{i) } -2P \qquad \text{ii) } P+Q \qquad \text{iii) } PQ$$

3. Calculer les trois polynômes de la Question 2, et vérifier que la réponses à la Question 2 coïncide avec ces résultats.

Exercice 2 – Unicité des coefficients d'un polynôme. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad a(x+2)^2 + b(x+3)^2 = cx + 10.$$

2. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, \quad \frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

Exercice 3 – Racine·s d'un polynôme de degré un ou deux. Déterminer la/les racine(s) des polynômes suivants.

1. $P_1 : x \mapsto 7x + 3$
2. $P_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x + 6$
3. $P_3 : x \mapsto -5x^2 - 11x - 2$
4. $P_4 : x \mapsto 2x^2 - 4\sqrt{5}x + 11$
5. $P_5 : x \mapsto -4x^2 + 12x - 9$
6. $P_6 : x \mapsto x^2 + mx + 1$ (avec $m \in \mathbb{R}$)

Exercice 4 – Équations avec des fractions. Résoudre les équations suivantes.

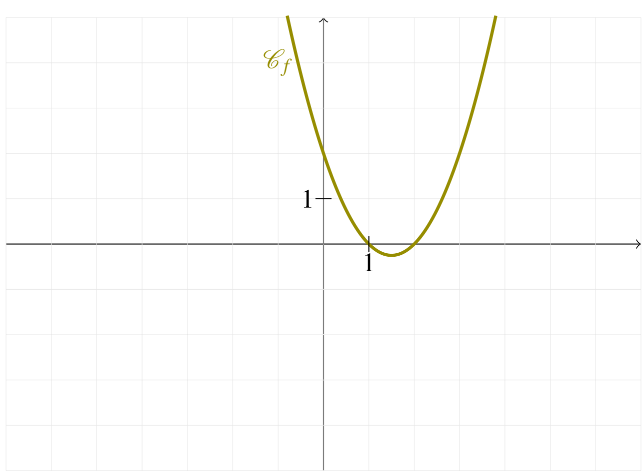
1. $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2x-5}{x-1}$
2. $\dfrac{4}{x-4} = \dfrac{40}{x^2-16} - 1$

Exercice 5 – Polynôme défini par certaines valeurs. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est-il unique ?

Exercice 6 – Résolution graphique. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative ci-dessous d'une fonction polynomiale du second degré. Résoudre graphiquement

1. l'équation $f(x) = 0$ 2. l'inéquation $f(x) > 0$ 3. l'inéquation $f(x) \geqslant 2$

Puis déterminer l'expression explicite de la fonction f et vérifier les résultats précédents.



Exercice 7 – Relations coefficients-racines. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. Résoudre le système suivant d'inconnues $(r,s) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} r + s = -2 \\ r \times s = -15 \end{cases}$$

(Indication : On montrera que s et r sont les racines d'un polynômes à déterminer.)

2. $(\star)$ Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28 et que le produit de leurs âges est égal à 192. *(Indication : $28^2 = 784$. On montrera que les âges de Marc et Sophie sont les racines d'un polynômes à déterminer.)*

Exercice 8 – Factorisation/Racines d'un polynôme. Soit P le polynôme défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = 3x^3 - x - 2$$

0. Donner le nombre maximal de racines distinctes possible pour le polynôme P.
1. Vérifier que 1 est une racine évidente du polynôme P.
2. Trouver un polynôme Q tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)Q(x).$$

3. En déduire toutes les racines de P.
4. $(\star)$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geqslant 0$. *(On s'aidera de la forme factorisée pour dresser le tableau de signe de P.)*

Exercice 9 – Factorisation/Racines d'un polynôme. Soit P le polynôme défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

0. Donner le nombre maximal de racines distinctes possible pour le polynôme P.
1. Vérifier que -2 est une racine évidente du polynôme P.
2. Trouver un polynôme Q tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+2)Q(x).$$

3. Factoriser complètement le polynôme P.
4. En déduire toutes les racines de P.
5. $(\star)$ Résoudre les équations suivantes. *(On pourra considérer des nouvelles variables $X = \ln(x)$ ou $X = e^x$.)*
   (a) $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 6 = 0$
   (b) $e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$

Exercice 10 – Ecricome 2015, Maths S. Factoriser le polynôme $P : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Exercice 11 – Division euclidienne. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les deux cas suivants.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = 2x^5 + x^3 + 17x - 2$ et $B(x) = x^2 + 2x + 3$.

Exercice 12 – Ecricome 2010, Maths S. Soit (α, β, γ) solution du système

$$(S) \qquad \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

On introduit le polynôme Q, défini par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

Montrer que (α, β, γ) est solution de (S) si et seulement si le polynôme $x \mapsto Q''(x) - 4xQ'(x)$ admet pour racines α, β, γ.