DS 6 (Concours Blanc 2)

Toutes les pages de la copie doivent être numérotées par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé. Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Exercice 1 – ECRICOME 2002. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

Partie A: Étude des fonctions f_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
   (a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

Partie B: Étude d'une suite.
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

5. Calcul de U_1.
   (a) Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{1+x}$$

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$$

   (c) En utilisant le changement de variable "$u = x+1$", retrouver le résultat précédent
   (d) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $U_1 = \frac{1}{4}$.
6. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

(b) Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (on ne demande pas sa limite).

(c) Démontrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}$$

(d) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.
   Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

(a) Montrer que:

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

(b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

(c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

Exercice 2 – EMLYON 2024. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1 . On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1;N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.
2. Le programme en langage Python ci-dessous définit une fonction «ajout» qui prend en argument une liste L et un entier x.

```python
def ajout(L,x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

   Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande ajout (L, x) modifie la liste L.
3. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous.
   Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1;N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons:

- L la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués;
- k le rang du tirage en cours et x le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd
def SimulT(N,i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = ...
    return(...)
```

4. On suppose $N = 3$. Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de SimulT(3,2).
   Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1,2 et 3 .

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.
   (a) Décrire l'évènement $(\ T_2 = k\ ) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des évènements $(\ X_j = 1\ )$ et $(\ X_j \neq 1\ )$ avec $j \in \mathbf{N}^*$.
   (b) En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.
   (c) Montrer que $P(T_2 = k) = \frac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et qu'elle est égale à $\frac{5}{2}$
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
   Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $i \in [\![1;N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par:

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1, \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1}-ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i-1$ numéros déjà tirés. On admet que les variable aléatoires $Z_1, \ldots, Z_N$ sont indépendantes.

9. Soit $i \in [\![2;N]\!]$.
   (a) Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-i+1}{N}$.
   (b) Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
10. Soit $i \in [\![1;N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \ldots, Z_i$.
11. (a) Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbf{N}^*$.
    (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right).$$

    (c) Déterminer la loi de T_3.

Exercice 3 – On considère l'application suivante

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (y+z, x+y+z, x)$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension de l'image de f.
4. En déduire une base de l'image de f.
5. Exprimer l'image sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
6. En partant du résultat de la question précédente, montrer que $Im(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\right\}$
7. Soient $u = (2,3,1), v = (1,2,1)$ et $E = \text{Vect}(u,v)$
   (a) Montrer que $E \subset Im(f)$
   (b) Donner la dimension de E
   (c) En déduire que $E = Im(f)$
8. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
9. Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\right\}$.
   (a) Déterminer $Im(f) \cap F$
   (b) Donner sa dimension
10. Soit $w = (0,-1,1)$ montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 4 – On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés $1,2,3,4,\ldots$ On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.
Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
   (c) Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$.
   (d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0), (Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$.
   (e) En déduire que : $P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   On pourra utiliser: $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$
2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide».
   Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $P(V) = 0$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

3. Déterminer $T(\Omega)$.
4. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega), \quad P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)$.
5. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.