DS Concours Blanc 2 (Correction)

Exercice 1 – .

1. La fonction est dérivable sur $]-1,+\infty[$. On calcule :

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif sur l'intervalle considéré et

$$n(1+x)+1 > n(-1+1)+1 = 1 > 0.$$

Donc

$$h_n'(x) > 0 \quad \text{sur } \left]-1,+\infty\right[.$$

Conclusion : h_n est strictement croissante.

2. On obtient immédiatement

$$h_n(0) = n\ln 1 + \frac{0}{1} = 0.$$

Comme h_n est strictement croissante, $\begin{cases} x<0 \Longrightarrow h_n(x)<0, \\ x=0 \Longrightarrow h_n(x)=0, \\ x>0 \Longrightarrow h_n(x)>0. \end{cases}$

3. (a) **Calcul de** f_1'

On a

$$f_1(x) = x\ln(1+x).$$

Par dérivation d'un produit,

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x).$$

Donc

$$f_1'(x) = h_1(x).$$

(b) Comme le signe de f_1' est celui de h_1,
- décroissante sur] - 1,0],
- croissante sur $[0,+\infty[$.
- les limites sont égales à $+\infty$ en -1 et en $+\infty$
Ainsi f_1 admet un minimum global égal à 0 en $x=0$.

4. **Cas général** $n \geq 2$

(a) **Calcul de la dérivée**

Par la règle du produit,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(1+x) + x^{\frac{1}{1+x}} \\ &= x^{n-1}(n\ln(1+x) + \overline{1+x}). \end{aligned}$$

Donc

$$f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x).$$

(b) Variations suivant la parité de n

Cas n impair ($n-1$ pair)

Alors

$$x^{n-1} \geq 0,$$

et son signe est toujours positif sauf en 0 . Le signe de f_n' est donc celui de h_n :

- négatif sur $]-1,0[$,
- positif sur $]0,+\infty[$.

Ainsi

f_n décroît puis croît.

Comme n impair implique $x^n < 0$ pour $x < 0$, on obtient

- $\lim_{x\to -1^+} f_n(x) = +\infty$,
- $f_n(0) = 0$,
- $\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Le minimum vaut donc 0 .

Cas n pair

Cette fois $n-1$ est impair :

- $x^{n-1} < 0$ sur $]-1,0[$,
- $x^{n-1} > 0$ sur $]0,+\infty[$.

Comme $h_n < 0$ sur $]-1,0[$,

$$f_n'(x) > 0$$

sur $]-1,0[$, puis encore positif sur $]0,+\infty[$.

Donc f_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.

Les limites sont :

- Lorsque $x \to -1^+$, $x^n > 0$ et $\ln(1+x) \to -\infty$, donc

$$\lim_{x\to -1^+} f_n(x) = -\infty$$

- $f_n(0) = 0$;
- Lorsque $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$$

Partie B:

5. On cherche

$$\frac{x^2}{1+x} = ax + b + \frac{c}{1+x}.$$

En identifiant les numérateurs,

$$x^2 = (ax+b)(1+x) + c.$$

Développement du membre de droite :

$$x^2 = ax^2 + (a+b)x + b + c.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme:

$$a = 1, \quad a + b = 0, \quad b + c = 0.$$

D'où

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1.$$

Autrement dit,

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

(b) On obtient

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 1dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

(c) $x \mapsto 1 + x$ est C^1 sur $[0,1]$
$u \mapsto u - 2 + \frac{1}{u}$ est C^0 sur $[1,2]$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_1^2 u - 2 + \frac{1}{u}du = \left[\frac{u^2}{2} - 2u + \ln(u)\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

(d) On effectue une intégration par parties :

$$u(x) = \ln(1+x), \quad v'(x) = x$$

Alors

$$u'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

avec u et v C^1 sur $[0,1]$ Ainsi

$$U_1 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$$

En utilisant le résultat précédent,

$$U_1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$U_1 = \frac{1}{4}$$

6. (a) Sur $[0,1]$,

$$x^{n+1} \leq x^n,$$

et $\ln(1+x) \geq 0$. Donc

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x),$$

puis, par intégration,

$$U_{n+1} \leq U_n.$$

La suite est décroissante.
(b) Comme

$$x^n \geq 0, \quad \ln(1+x) \geq 0,$$

on a par positivité de l'intégrale

$$U_n \geq 0.$$

La suite est décroissante et minorée, donc elle converge.
(c) Sur $[0,1]$,

$$\ln(1+x) \leq \ln 2.$$

donc

$$x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2.$$

Ainsi par croissance de l'intégrale

$$U_n \leq \ln 2 \int x^n dx = \frac{\ln 2}{n+1}$$

Donc

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

(d) Comme

$$\frac{\ln 2}{n+1} \longrightarrow 0,$$

le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0.$$

7. (a) On reconnaît une somme géométrique :

$$S_n(x) = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

(b)
En intégrant sur $[0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

(c)
Une intégration par parties avec

$$u(x) = \ln(1+x), \quad v'(x) = x^n$$

puis

$$u'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad v'(x) = x^{n+1}$$

conduit à

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

En remplaçant l'intégrale grâce au résultat précédent, on obtient bien la formule demandée :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$$

Exercice 2 – 1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit clairement la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n = N\}$, puisque les tirages se font avec remise et qu'à chaque tirage, l'une des n boules de l'urne est choisie avec équiprobabilité.

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, X_k(\Omega) = [\![1;N]\!] \text{ et } \forall i \in [\![1;N]\!], \mathbf{P}(X_k = i) = \frac{1}{N}.$$

2. La fonction ajout définie par l'énoncé, teste si l'élément x passé en argument appartient à la liste L , l'autre argument de la fonction. Si ce n'est pas le cas, et uniquement sous cette condition, **x** est ajouté à L.

3.
```python
import numpy.random as rd
def SimulT(N,i):
    L = []
    k = 0
    while len(L)<i :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = k+1
    return(k)
```

4.
```python
s=0
for j in range(100):
    s = s + Simul_T(3,2)
print(s/100)
```

5. La variable aléatoire T_2 donne le nombre de tirages nécessaires pour avoir obtenu deux numéros différents : il faut faire au moins deux tirages, et les tirages peuvent durer autant de temps que l'on veut, tant qu'on pioche toujours le même numéro :

$$T_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![.$$

6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.

(a) L'événement $[T_2 = k] \cap [X_1 = 1]$ est réalisé si et seulement si les $k-1$ premiers tirages ont donné le numéro 1 (comme le premier), et le k-ième donne pour la première fois un des deux autres numéros (2 ou 3) :

$$[T_2 = k] \cap [X_1 = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \cap \cdots \cap [X_{k-1} = 1] \cap [X_k \neq 1].$$

(b) Les tirages successifs sont faits avec remise, donc peuvent être considérés mutuellement indépendants; par conséquent :

$$\mathbf{P}([T_2=k]\cap[X_1=1])=\mathbf{P}(X_1=1)\times\mathbf{P}(X_2=1)\times\cdots\times\mathbf{P}(X_{k-1}=1)\times\mathbf{P}(X_k\neq 1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3^k}.$$

(c) Le premier tirage peut donner n'importe lequel des trois entiers 1,2 et 3 ; les événements $([X_1=1],[X_1=2],[X_1=3])$ forment un système complet, avec lequel la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(T_2=k)=\mathbf{P}([T_2=k]\cap[X_1=1])+\mathbf{P}([T_2=k]\cap[X_1=2])+\mathbf{P}([T_2=k]\cap[X_1=3])=3\times\frac{2}{3^k}=\frac{2}{3^{k-1}}$$

puisque les deux autres probabilités de la formule ont, selon le même principe, la même valeur qu'à la question précédente.

7. La variable aléatoire T_2 admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 2}k\mathbf{P}(T_2=k)$ est absolument convergente.
Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence absolue équivaut à la convergence simple.
Pour tout entier $n\geqslant 2$: $\quad \sum_{k=2}^{n}k\mathbf{P}(T_2=k)=2\sum_{k=2}^{n}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.
On reconnaît une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}\in\,]-1;1[$, qui est donc convergente; la variable aléatoire T_2 admet une espérance, qui vaut :

$$\mathbf{E}(T_2)=2\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-1\right)=2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-1\right)=2\left(\frac{9}{4}-1\right)=\frac{5}{2}.$$

8. La variable aléatoire $Z_2=T_2-1$ a pour univers-image $\mathbb{N}^*$, avec :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}(Z_2=k)=\mathbf{P}(T_2-1=k)=\mathbf{P}(T_2=k+1)=\frac{2}{3^k}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1},$$

ce qui prouve que Z_2 suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac{2}{3}$.
La variable aléatoire Z_2 admet alors une espérance et une variance, qui valent :

$$\mathbf{E}(Z_2)=\frac{1}{p}=\frac{3}{2}\Longrightarrow\mathbf{E}(T_2)=\mathbf{E}(Z_2+1)=\mathbf{E}(Z_2)+1=\frac{5}{2}\text{ et }\mathbf{V}(T_2)=\mathbf{V}(Z_2+1)=\mathbf{V}(Z_2)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

par linéarité de l'espérance et propriété de la variance : on a bien retrouvé la valeur de $\mathbf{E}(T_2)$.

9. Soit $i\in[\![2;N]\!]$.
(a) La variable aléatoire Z_i représente le temps d'attente d'un premier succès : obtenir un numéro qui ne fait pas partie des $(i-1)$ numéros déjà tirés, dans une suite d'épreuves de Bernoulli (les tirages après avoir obtenu $(i-1)$ numéros différents) identiques et indépendantes, de probabilité de succès $\frac{N-(i-1)}{N}$: la variable aléatoire Z_i suit bien la loi géométrique de paramètre $\frac{N-i+1}{N}$.
(b) D'après le cours sur la loi géométrique :

$$\mathbf{E}(Z_i)=\frac{N}{N-i+1}\quad\text{ et }\quad\mathbf{V}(Z_i)=\frac{1-\frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2}=\frac{i-1}{N}\times\frac{N^2}{(N-i+1)^2}=\frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}.$$

Lorsque $i=1$ **:** $\frac{N}{N-1+1}=1$ est bien l'espérance de la variable certaine $T_1=1$, et $\frac{N(1-1)}{(N-1+1)^2}=0$ est sa variance.

10. Soit $i \in [\![1;N]\!]$; il est clair que : $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = T_1 + T_2 - T_1 + \cdots + T_n - T_{n-1} = T_n$ par télescopage.

11. (a) Soient ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$; les variables aléatoires Z_2 et Z_3 sont indépendantes d'après l'énoncé, et puisque Z_2 et Z_3 suivent chacune une loi géométrique, de paramètres respectifs $\frac{N-1}{N}$ et $\frac{N-2}{N}$:

$$\mathbf{P}([Z_2 = \ell] \cap [Z_3 = k]) = \mathbf{P}(Z_2 = \ell) \times \mathbf{P}(Z_3 = k) = \frac{N-1}{N} \times \left(\frac{1}{N}\right)^{\ell-1} \times \frac{N-2}{N} \times \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1} = \frac{(N-1)(N-2)2^{k-1}}{N^{k+\ell}}.$$

Soit un entier $n \geqslant 2$: puisque Z_2 et Z_3 sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors

$$[Z_2 + Z_3 = n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [Z_2 = k] \cap [Z_3 = n-k]$$

et par union disjointe :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_2 + Z_3 = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(Z_2 = k) \cap \mathbf{P}(Z_3 = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(N-1)(N-2)2^{n-k-1}}{N^n} \\
&\overset{[j=n-k-1]}{=} \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{j=0}^{n-2} 2^j = \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \times \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \times \frac{2^n - 2}{N^n} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \times \left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right)
\end{aligned}$$

(b) Puisque $T_1 = Z_1$ est la variable certaine égale à 1 :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \mathbf{P}(T_3 = n) = \mathbf{P}(1 + Z_2 + Z_3 = n) = \mathbf{P}(Z_2 + Z_3 = n-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^{n-1} - \frac{2}{N^{n-1}}\right).$$

Exercice 3 – 1. Soient a et b deux nombres réels et $u = (x,y,z)$ et $v = \left(x', y', z'\right)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v).$$

Dans un premier temps, le vecteur $au + bv$ est donné par

$$au + bv = a(x,y,z) + b\left(x', y', z'\right) = \left(ax + bx', ay + by', az + bz'\right)$$

Donc l'image du vecteur $au + bv$ est donné par

$$\begin{aligned}
f(au + bv) &= \left(\left(ay + b'\right) + \left(az + b'\right), \left(ax + bx'\right) + \left(ay + by'\right) + \left(az + bz'\right), \left(ay + b'\right)\right) \\
&= a(y+z, x+y+z, x) + b\left(y' + z', x' + y' + z', x'\right) \\
&= af(x,y,z) + bf\left(x', y', z'\right) \\
&= af(u) + bf(v)
\end{aligned}$$

Donc l'application f est bien linéaire.

2. On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$ d' inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff \begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases} \\
&\iff \quad u = (0,-z,z) \\
&\iff \quad u \in \mathrm{Vect}((0,-1,1))
\end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((0,-1,1))$$

3. Le théorème du rang donne

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3.$$

Donc

$$1 + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$$

d'où

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2.$$

4. Calculons les images de la base canonique :

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= (0,1,1), \\
f(0,1,0) &= (1,1,0), \\
f(0,0,1) &= (1,1,0).
\end{aligned}$$

Les deux derniers vecteurs sont identiques. On obtient donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,1,0)).$$

Ces deux vecteurs forment une famille génératrice, de plus étant non colinéaires, ils forment une famille libre de l'image donc une base.

5. Simplement

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,1,0))$$

6. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
u \in Im(f) &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a(0,1,1)+b(1,1,0) = u \\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} b = x \\ a+b = y \\ a = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} b = x \\ a = y-x \\ a = z \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Si $y-x \neq z$, le système n'a pas de solution donc la dernière équivalence n'est pas vraie, donc la première n'est pas vraie non plus, c'est-à-dire, $u \notin F$.
- Si $y-x = z$, alors le système admet une solution donnée par $(a,b) = (x-2z, z)$, donc la dernière équivalence est vraie et donc la première aussi, c'est-à-dire $u \in F$. Finalement

$$u \in Im(f) \Leftrightarrow y-x = z$$

et donc,

$$Im(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z = 0\right\}$$

7. (a) On vérifie : Pour u,

$$2-3+1 = 0.$$

Pour v,

$$1-2+1 = 0.$$

Donc $u, v \in \mathrm{Im}(f)$, qui est un sous espace vectoriel donc toutes les combinaisons linéaires de u et v aussi.
donc

$$E \subset \mathrm{Im}(f).$$

(b) Cherchons si u et v sont colinéaires. S'il existait λ tel que

$$(2,3,1) = \lambda(1,2,1),$$

on aurait

$$\lambda = 2, \quad 2\lambda = 3$$

impossible. Ils sont donc non colinéaires et forment une famille libre qui est de plus génératrice de E. C'est donc une base et ainsi:

$$\dim(E) = 2.$$

(c) On sait - $E \subset \mathrm{Im}(f)$, - $\dim(E) = 2$, - $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
Donc

$$E = \mathrm{Im}(f).$$

8. - Injective ? Non, car
$$\ker(f) \neq \{0\}.$$
- Surjective ? Non, car
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 < 3.$$
- Bijective ? Non.
Ainsi
f n'est ni injective ni surjective, donc pas bijective.
9. (a) Déterminons une famille de génératrice de $Im(f) \cap F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0 \text{ et } x+y-2z=0\right\}$.
L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et deux équations Soit $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :
$$u \in Im(f) \cap F \quad \Leftrightarrow \quad (S)\left\{\begin{array}{c} x-y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right.$$
grâce à la méthode du pivot de Gauss.
$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \begin{cases} \ \ x-y+z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ z=2x \end{cases}\end{aligned}$$
Ainsi, on obtient que
$$\begin{aligned} u \in Im(f) \cap F &\Leftrightarrow u=(x,3x,2x) \\ &\Leftrightarrow u = z(1,3,2) \\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}((1,3,2)) \end{aligned}$$
Ainsi,
$$Im(f) \cap F = \mathrm{Vect}((1,3,2))$$
(b) $((1,3,2))$ est une famille libre et génératrice de $Im(f) \cap F$ c'est donc une base de $Im(f) \cap F$
donc $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap F) = 1$
10. Soient $u=(2,3,1), v=(1,2,1)$ et $w=(0,-1,1)$. Montrons que la famille (u,v,w) est libre.
Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On a $\quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
donc $\quad \lambda_1(2,3,1) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(0,-1,1) = (0,0,0)$
$$\text{donc} \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
donc $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
Donc la famille (u,v,w) est libre.

Exercice 4 – 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) En se plaçant du point de vue de l'urne 1 : chaque placement de jeton dans une des trois urnes peut être vu comme une épreuve de Bernoulli où le succès correspond au fait de placer le jeton dans l'urne 1.
On répète cette épreuve n fois de suite de façon identique et indépendante par rapport aux autres épreuves, et X_n compte le nombre de succès - lequel est de probabilité $\frac{1}{3}$ - obtenus en n épreuves.
On en conclut donc que X_n suit la loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{1}{3}\right)$. Des considérations en tout point analogues permettent d'affirmer que Y_n et Z_n suivent la même loi que X_n.
(b) La formule générale de la loi binomiale : $\forall k \in [\![0; n]\!], \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$, donne en particulier :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \text{ et } \mathbb{P}(X_n = n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(c) L'événement $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ signifie qu'après n jetons placés, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun : c'est donc qu'ils sont tous allés dans l'urne 1, et on a bien l'égalité d'événements :

$$[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n].$$

(d) L'événement V_n est réalisé si et seulement si, après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide, donc si et seulement si au moins un des trois événements $[X_n = 0], [Y_n = 0]$ ou $[Z_n = 0]$ est réalisé :

$$V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0].$$

(e) L'union est non-disjointe, donc $\mathbb{P}(V_n)$ se calcule avec la formule du crible :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_n) =& \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}(Z_n = 0) - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) \\
& - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Z_n = 0]) - \mathbb{P}([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \\
& + \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \\
=& \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}(Z_n = 0) - \mathbb{P}(Z_n = n) - \mathbb{P}(Y_n = n) - \mathbb{P}(X_n = n) + 0 \\
=& 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n,
\end{aligned}$$

il est en effet impossible qu'après n jetons placés, les trois urnes soient encore toutes vides!

2. L'événement V est réalisé si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement V_n est toujours réalisé, ce qui conduit donc à écrire :

$$V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

Or si l'une des trois urnes est encore vide après $n+1$ jetons placés, elle était déjà vide après n jetons seulement : pour tout $n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1}$ implique V_n, donc $V_{n+1} \subset V_n$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion.
La propriété de limite monotone pour les probabilités s'applique donc, qui assure que :

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(V_n) = \lim_{n \to +\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 - 0 = 0,$$

puisque $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$. Il est donc quasi-impossible que l'une des trois urnes reste vide indéfiniment.

3. Il faut bien sûr placer au moins 3 jetons différents pour avoir une chance que chacune des 3 urnes contienne au moins un jeton; le nombre de placement peut être envisagé aussi grand qu'on veut puisqu'on peut imaginer que les jetons ne vont que dans deux des trois urnes (ou même tous dans la même urne) aussi longtemps qu'on veut. On a vu par contre qu'il était presque impossible de ne jamais parvenir à terminer les placements selon la règle du jeu, donc :

$$T(\Omega) = [\![3;+\infty[\![.$$

4. Soit donc $n \geqslant 3$: l'événement $[T = n]$ est réalisé si et seulement si après n placement, plus aucune une n'est vide, alors qu'après ($n-1$) placements seulement, au moins une des trois urnes (et en fait exactement une) était encore vide, donc :

$$[T = n] = V_{n-1} \cap \overline{V_n} \text{ ou } V_{n-1} \backslash V_n.$$

Le passage à la probabilité donne alors :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_{n-1} \cap V_n) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n),$$

puisqu'on a vu à la question 2. que $V_n \subset V_{n-1}$, et donc que $V_{n-1} \cap V_n = V_n$.

5. Le calcul explicite donne, à l'aide de la formule précédente et du résultat de la question 1.e) : pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = n) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + = \left(3 - 3 \times \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(-3 + 3 \times \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

La variable aléatoire discrète T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant 3} k\mathbb{P}(T = k)$ est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence simple suffit. Pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\sum_{k=3}^{n} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît deux séries géométriques dérivées, convergentes puisque $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$: la série de départ est convergente, et T admet donc une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}E(T) &= \sum_{k=3}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=3}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + 2 + \frac{4}{3} = 9 - 1 - 2 \cdot \frac{9}{4} + 2 = \frac{11}{2}\end{aligned}$$

On retrouve bien une espérance théorique $E(T) = \frac{11}{2} = 5,5$ cohérente avec la moyenne empirique obtenue par simulation.