Exercice 1

1.

	P	Q
coeff. constant	5	1
degré	3	2
coeff. dom.	3	1
ensemble	$\mathbb{R}_3[x], \mathbb{R}_4[x], \dots$	$\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_3[x], \dots$

2. On a :

- $\deg(-2P) = \deg(P) = 3$
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q) = \max(3,2) = 3$
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q = 3 + 2 = 5$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(-2P)(x) &= -2 \times P(x)\\ &= -2(3x^3+4x^2+5)\\ &= -6x^3-8x^2-10\end{aligned}$$

$\deg(-2P) = 3$ cela coïncide avec la question 2

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x)\\ &= 3x^3+4x^2+5 + x^2-7x+1\\ &= 3x^3+5x^2-7x+6\end{aligned}$$

$\deg(P+Q) = 3 \leqslant 3$ cela coïncide avec la question 2

$$\begin{aligned}(PQ)(x) &= P(x) \times Q(x)\\ &= (3x^3+4x^2+5)(x^2-7x+1)\\ &= 3x^5-21x^4+3x^3+4x^4-28x^3+4x^2+5x^2-35x+5\\ &= 3x^5-17x^4-25x^3+9x^2-35x+5\end{aligned}$$

- $\deg(PQ) = 5$: cela coïncide avec la question 2
- la formule coïncide avec celle trouvée en question 3

Exercice 2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant, on obtient,

$$\begin{aligned} a(x+2)^2 + b(x+3)^2 &= a(x^2+4x+4) + b(x^2+6x+9) \\ &= ax^2 + 4ax + 4a + bx^2 + 6bx + 9 \\ &= (a+b)x^2 + (4a+6b)x + 4a+9 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ a(x+2)^2 + b(x+3)^2 = cx+10 &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (a+b)x^2 + (4a+6b)x + 4a+9 = 0 \times x^2 + cx + 10 \\ &\iff \begin{cases} a+b=0 \\ 4a+6b=c \\ 4a+9b=10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b=-a \\ 4a+6b=c \\ 4a+9\times(-a)=10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b=2 \\ c=4 \\ a=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} &= \frac{ax(x+1) + b(x-1)(x+1) + c(x-1)x}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{ax^2 + ax + bx^2 - b + cx^2 - cx}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (a-c)x - b}{x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} &\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ -b-2c=0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ b=-2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$,

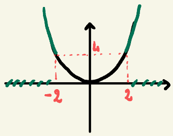
$$\frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$$

Exercice 3 (Réponses non détaillées)

1. Une unique racine réelle : $-3/7$
2. Une unique racine réelle : -12
3. Deux racines réelles : -2 et $-\frac{1}{5}$
4. Aucune racine réelle
5. Une unique racine réelle : $3/2$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^2 + mx + 1$

C'est un polynome de degré deux, on calcule son discriminant :

$$\Delta = m^2 - 4$$



- 1er cas : si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $m > 2$ ou $m < -2$
  alors deux racines réelles
  $$x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2-4}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2-4}}{2}$$
- 2ième cas : si $\Delta = 0$, c-à-d $m = 2$ ou $m = -2$
  alors une unique racine réelle
  $$x_0 = -\frac{m}{2}$$
- 3ième cas : si $\Delta < 0$, c-a-d $-2 < m < 2$
  alors aucune racine réelle

Exercice 4

1. Résoudre l'équation $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1}$.

* Les valeurs interdites sont les réels x tels que :
$x+1=0$ et $x-1=0$,
c'est-à-dire $x=-1$ et $x=1$.

* Soit x un nombre réel différent de 1 et -1.

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1} \iff (x-1)\cdot(x-1) = (2x-5)(x+1)$$
$$\iff x^2 - x - x + 1 = 2x^2 + 2x - 5x - 5$$
$$\iff x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 3x - 5$$
$$\iff x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 3x + 5 = 0$$
$$\iff -x^2 + x + 6 = 0$$

* On résout l'équation $-x^2 + x + 6 = 0$.
  . On calcule le discriminant :
$$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 6$$
$$= 1 + 24$$
$$= 25$$
  . Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par
$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$
et
$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Conclusion : Comme les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites, on en déduit que l'ensemble des solutions est donné par :

$$\mathcal{S} = \{-2\,,\,3\}$$

▶ Vérification :

$\frac{-2-1}{-2+1} = \frac{-3}{-1} = 3$ et $\frac{2\times(-2)-5}{-2-1} = \frac{-4-5}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$ ✓

$\frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{2\times 3-5}{3-1} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

2. Résoudre l'équation $\frac{4}{x-4} = \frac{40}{x^2-16} - 1$

* Les valeurs interdites sont les réels x tels que :
$x-4=0$ et $x^2-16=0$,
c'est-à-dire $x=4$ et $x=-4$.

* Soit x un nombre réel différent de 4 et -4.

$$\frac{4}{x-4} = \frac{40}{x^2-16} - 1 \iff \frac{4}{x-4} = \frac{40-(x^2-16)}{x^2-16} = \frac{56-x^2}{x^2-16}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 4 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\iff 4\cdot(x^2-16) = (56-x^2)(x-4)$$
$$\iff 4\cdot\cancel{(x-4)}(x+4) = (56-x^2)\cancel{(x-4)}$$
$$\iff 4(x+4) = 56 - x^2$$
$$\iff 4x + 16 = 56 - x^2$$
$$\iff 4x + 16 - 56 + x^2 = 0$$
$$\iff x^2 + 4x - 40 = 0$$

* On résout l'équation $x^2 + 4x - 40 = 0$
  . On calcule le discriminant :
$$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times(-40)$$
$$= 16 + 160$$
$$= 176$$
  . Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par

$$\sqrt{176} = \sqrt{4\times 44} = \sqrt{4^2\times 11} = 4\sqrt{11}$$

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{176}}{2} = \frac{-4+4\sqrt{11}}{2} = -2+2\sqrt{11}$$
et
$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{176}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{11}}{2} = -2-2\sqrt{11}$$

Conclusion : Comme les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites, on en déduit que l'ensemble des solutions est donné par :

$$\mathcal{S} = \{-2+2\sqrt{11}\,,\,-2-2\sqrt{11}\}$$

▶ Vérification : (...)

Exercice 5

On cherche $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré 2 tq

$$(S) \begin{cases} P(-1) = 1 \\ P(0) = -1 \\ P(1) = -1 \end{cases}$$

On peut chercher P sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b, c des réels à déterminer.

Avec ces notations, le système (S) devient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 1 \\ c = -1 \\ a + b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - (-a) = 2 \\ b = -a \\ c = -1 \end{cases}$$

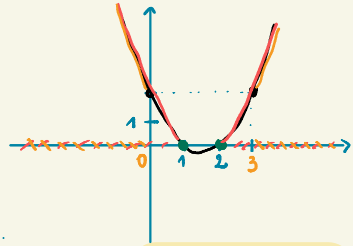
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

car on a raisonné par équivalence

Finalement, il existe un unique polynôme vérifiant les trois conditions (S) qui est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^2 - x - 1.$$

Exercice 6



- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = 2$

$f(x) > 0 \iff x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

$f(x) \geqslant 2 \iff x \in]-\infty, 0] \cup [3; +\infty[$

- Comme le polynôme P
  - est de degré 2
  - admet 1 et 2 comme racines (d'après le graphique)

il est de la forme

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x-1)(x-2)$

où a est son coeff. dominant (réel) à déterminer.

Or d'après le graphique,

$$P(0) = 2$$

Donc $a \in \mathbb{R}$ doit nécessairement vérifier

$$a \times (0-1)(0-2) = 2$$

c-à-d $\quad a = 1$.

Finalement, le polynôme P est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)(x-2)$$

Exercice 7

1. Soit $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\begin{cases} r+s = -2 \\ r \times s = -15 \end{cases}$$

Alors r et s sont les racines du polynôme suivant :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^2 - (r+s)x + r \times s$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par :

$$\frac{-2+\sqrt{64}}{2} = \frac{-2+8}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{-2-\sqrt{64}}{2} = \frac{-2-8}{2} = -5$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par :

$$\mathcal{S} = \{ (3,-5), (-5,3) \}$$

Vérification : $\begin{cases} 3 \times (-5) = -15 \\ 3 - 5 = -2 \end{cases}$

2. Notons s l'âge de Sophie et m l'âge de Marc.

D'après l'énoncé, (s,m) est solution de :

$$\begin{cases} s+m = 28 \\ s \times m = 192 \\ m > s \end{cases}$$

Alors m et s sont les racines du polynôme suivant :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^2 - (m+s)x + m \times s$$
$$= x^2 - 28x + 192$$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = (-28)^2 - 4 \times 192 = 784 - 768 = 16$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par :

$$\frac{-(-28)+\sqrt{16}}{2} = \frac{28+4}{2} = 16 \quad \text{et} \quad \frac{-(-28)-\sqrt{16}}{2} = \frac{28-4}{2} = 12$$

Comme $m > s$, nécessairement

$$m = 16 \quad \text{et} \quad s = 12$$

Exercice 8

On considère le polynôme P donné par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 3x^3 - x - 2$

0. Comme P est de degré 3, il peut admettre au plus trois racines distinctes.

1. On a :
$P(1) = 3 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$
donc 1 est une racine de P.

2. On cherche un polynôme Q tq
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q(x)$

- Alors nécessairement, Q est un polynôme de degré 2 donc on peut le chercher sous la forme
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax^2 + bx + c$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$
\begin{aligned}
(x-1)Q(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\
&= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\
&= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$P(x) = (x-1)Q(x)$
si et seulement si a, b, c sont solutions de

$$
\begin{cases}
a = 3 \\
-a + b = 0 \\
-b + c = -1 \\
-c = -2
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
a = 3 \\
b = 3 \\
c = 2
\end{cases}
$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$Q(x) = 3x^2 + 3x + 2$

3. D'après la Question 2, on a
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)$
$= Q(x) \times (3x^2+3x+2)$

Donc il reste seulement à regarder les racines de Q.

Comme Q est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 = 9 - 24 = -15$
- comme $\Delta < 0$, le polynôme Q n'admet pas de racines réelles.

Donc P admet seulement 1 comme racine réelle.

4. On utilise la forme factorisée de P pour dresser son tableau de signe.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$3x^2+3x+2$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

car le polynôme Q n'admet pas de racine réelle et son coefficient dominant est positif

Donc $P \geqslant 0$ sur $[1; +\infty[$
et $P \leqslant 0$ sur $]-\infty, 1]$

Exercice 9

On considère le polynôme P donné par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

0. Comme P est de degré 3, il peut admettre au plus trois racines distinctes.

1. On a :
$P(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$
Donc -2 est une racine de P

2. On cherche un polynôme Q tq
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+2)\,Q(x)$

- Alors nécessairement, Q est un polynôme de degré 2 donc on peut le chercher sous la forme
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax^2 + bx + c$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x+2)\,Q(x) &= (x+2)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c\\ &= ax^3+(2a+b)x^2+(2b+c)x+2c\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x+2)\,Q(x)$$

si et seulement si a, b, c sont solutions de

$$\begin{cases} a & = 1\\ 2a+b & = -2\\ 2b+c & = -5\\ 2c & = 6\end{cases} \iff \begin{cases} a = 1\\ b = -4\\ c = 3\end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x^2-4x+3$$

3. D'après la Question 2, on a

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+2)\,Q(x)$
$= (x+2)(x^2-4x+3)$

Donc il reste seulement à factoriser Q.

Comme Q est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = (-4)^2-4\times 3 = 16-12 = 4$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme Q admet deux racines réelles données par

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = (x-3)(x-1)$$

et $P(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}P(x) = 0 &\iff (x+2)(x-1)(x-3) = 0\\ &\iff x+2=0 \text{ ou } x-1=0 \text{ ou } x-3=0\\ &\iff x=-2 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=3\end{aligned}$$

Donc P admet exactement trois racines distinctes, données par -2, 1 et 3.

5. a) Soit $x>0$ (pour que l'équation soit licite) On a :

$(\ln x)^3-2(\ln x)^2-5\ln x+6=0 \iff P(\ln x)=0$

$X=\ln x \; ; P(X)=0$

$\iff \ln x=-2$ ou $\ln x=1$ ou $\ln x=3$ d'après la question précédente

$\iff x=e^{-2}$ ou $x=e^1$ ou $x=e^3$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$\{e^{-2}, e^1, e^3\}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$e^{2x}-2e^x+6e^{-x}-5=0 \iff e^{3x}-2e^{2x}-5e^x+6=0$ en multipliant l'équation par e^x

$\iff (e^x)^3-2(e^x)^2-5e^x+6=0$

$\iff P(e^x)=0$

$\iff \underbrace{e^x=-2}_{\text{impossible}}$ ou $e^x=1$ ou $e^x=3$ d'après la question précédente

$\iff x=\ln 1=0$ ou $x=\ln 3$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$\{0, \ln 3\}$$

Exercice 10

On considère le polynôme P défini par,
pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=2x^3-3x^2+1$.

En utilisant la même méthode que pour les exercices 8 et 9, on trouve que le polynôme P se factorise de la manière suivante :

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Exercice 11

1. Première méthode : à la main

Effectuons la division euclidienne de A par B où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$.

On cherche Q et R tels que

$$A = B \times Q + R \quad \text{avec } \deg R < \deg B = 1$$

Donc Q et R sont nécessairement de degré 1, on les cherche sous la forme

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax + b$
$R(x) = cx + d$
avec a, b, c, d à trouver

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) \times Q(x) + R(x) \\ &= (x^2 + x + 1)(ax + b) + cx + d \\ &= ax^3 + bx^2 + ax^2 + bx + ax + b + cx + d \\ &= ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b+c)x + b + d \end{aligned}$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = x - 1$ (quotient de la division euclidienne)
$R(x) = 2$ (reste de la division euclidienne)

1. Deuxième méthode (en posant la division)

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} -(x^3 + x^2 + x) & x - 1 \\ \cline{1-1} -x^2 - x + 1 & \text{(quotient)} \\ -(-x^2 - x - 1) & \\ \cline{1-1} 2 & \\ \text{(reste)} & \end{array}$$

2. En posant la division euclidienne, on a :

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + x^3 + 17x - 2 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} -(2x^5 + 4x^4 + 6x^3) & 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6 \\ \cline{1-1} -4x^4 - 5x^3 + 17x - 2 & \\ -(-4x^4 - 8x^3 - 12x^2) & \\ \cline{1-1} 3x^3 + 12x^2 + 17x - 2 & \\ -(3x^3 + 6x^2 + 9x) & \\ \cline{1-1} 6x^2 + 8x - 2 & \\ -(6x^2 + 12x + 18) & \\ \cline{1-1} -4x - 20 & \end{array}$$

Donc on obtient

$$A = B \times Q + R$$

avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6$
$R(x) = -4x - 20$