Interrogation du 16/03/2026

1. Soit $F = \{(a+b,b,a) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que F est l'espace vectoriel engendré par cette famille.
   L'ensemble est défini de manière paramétrique avec deux paramètres (Étape 1). On a :

$$\begin{aligned} u \in F \Leftrightarrow &\quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, u = (a+b,b,a) \\ \Leftrightarrow &\quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, u = a(1,0,1)+b(1,1,0) \\ \Leftrightarrow &\quad u \in \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0)) \end{aligned}$$

   Donc

$$F = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0))$$

2. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-t=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une famille génératrice de F.
   L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations (Étape 1).
   Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad (S) \begin{cases} x+y-t \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

   On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales
   - par exemple x et y
   - que l'on exprime en fonction de deux inconnues restantes $-z$ et t, grâce à la méthode du pivot de Gauss.
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-t=0 \\ -3y+z-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t \end{cases}$ (Étape 3)
   Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad u = \left(\frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t, \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}t, z, t\right) \\ &\Leftrightarrow \quad u = z\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right) \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right)\right) \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right)\right) = \mathrm{Vect}((1,2,3,0),(-1,1,0,3))$$

   et la famille

$$((1,2,3,0),(-1,1,0,3))$$

   est génératrice de F.