TD 02 – Fonctions usuelles

Exercice 1 – Autour de la fonction inverse. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < 4$? *On commencera par représenter la fonction inverse pour résoudre graphiquement cette inéquation.*
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$.

Exercice 2 – Calculs algébriques avec la racine carrée. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers (avec b le plus petit possible).

   a. $\sqrt{28}+\sqrt{63}$ b. $\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}$ c. $9\sqrt{20}-5\sqrt{45}-2\sqrt{180}$

2. Montrer que le nombre suivant est un entier (à déterminer),

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

   On pourra mettre les deux fractions au même dénominateur.

3. On pose

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

   Montrer que

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi^2 = 1+\varphi.$$

Exercice 3 – Autour de la valeur absolue.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations/inéquations suivantes :

   a. $|x+3| = 3$ b. $|x-3| \geqslant 4$ c. $|7-3x| \leqslant 5$ d. $2 \leqslant |x+1| \leqslant 3$

2. Donner une expression de la fonction f sans valeur absolue, où f est définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x^2-5x+6|.$$

   On pourra commencer par dresser le tableau de signe du polynôme $x \mapsto x^2-5x+6$.

3. Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{x^n}{n}\right| \leqslant 1.$$

Exercice 4 – Autour de la fonction partie entière. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2.5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0,1[$, simplifier l'expression de f.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f.

Exercice 5 – (In)équations avec ln et exp. Relier chacune des équations et inéquations suivantes à sa solution.

$\ln(x) = -7$	☐	☐	$x \geqslant 1$
$\exp(x) = 4$	☐	☐	$x \leqslant \frac{1}{4}(\mathrm{e}^3 + 1)$
$\ln(3x-1) \geqslant \ln(2)$	☐	☐	e^{-7}
$\mathrm{e}^{-3x+5} < 2$	☐	☐	$x > -\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{5}{3}$
$\ln(4x-1) \leqslant 3$	☐	☐	$\ln(4)$

Exercice 6 – Calculs algébriques sur ln et exp. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ chacun des nombres suivants.

$$\text{a) } \ln\left(\frac{1}{4}\right) \qquad \text{b) } \ln(8) + 5\ln(2) \qquad \text{c) } \ln(\sqrt{32}) \qquad \text{d) } \ln(10) - \ln(20)$$

2. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\text{a) } \mathrm{e}^5 \times e^2 \times \mathrm{e}^{-3} \qquad \text{b) } \mathrm{e}^3 \times (\mathrm{e}^{-4})^2 \qquad \text{c) } \frac{\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}} \qquad \text{d) } \frac{\mathrm{e} \times (\mathrm{e}^5)^7}{\mathrm{e}^{-9} \times \mathrm{e}^4}$$

3. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$\text{a) } \mathrm{e}^{2\ln 3 + \ln 4} \qquad \text{b) } \mathrm{e}^{3\ln 2 - \ln 4} \qquad \text{c) } \frac{\mathrm{e}^{\ln 6 + 1}}{\mathrm{e}^{\ln 9 + 2}}$$

$$\text{d) } \mathrm{e}^{3\ln 3} + \mathrm{e}^{2\ln 7} \qquad \text{e) } \mathrm{e}^{5\ln 3} \times \mathrm{e}^{4\ln 9} \qquad \text{f) } \ln(1+\mathrm{e}^5) + \ln\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}}\right)$$

4. Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité de l'expression.

$$\text{a) } \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x}} \qquad \text{b) } \frac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}} \qquad \text{c) } \mathrm{e}^{2\ln(x)}$$

$$\text{d) } -\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{e) } \sqrt{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{f) } \frac{\mathrm{e}^{x^2-2x} \times (\mathrm{e}^x)^2}{(\mathrm{e}^{2x})^3}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions A et B et factoriser les expressions C et D.

$$A = (\mathrm{e}^{2x} + 5)^2 \qquad B = (\mathrm{e}^{2x} - 2)(\mathrm{e}^{-x} + 5)$$

$$C = 5\mathrm{e}^{-4x} - 3\mathrm{e}^{-4x} + 7\mathrm{e}^{-4x} \qquad D = \mathrm{e}^{2x} - 9x^2$$

Exercice 7 – Calculs algébriques sur les puissances. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A = 2^3 \times (4 \times 3)^2 \qquad B = \frac{7^7}{7^4} \qquad C = \frac{(2^2)^3 \times 10 \times 4^{-2}}{15 \times 8}$$

2. Soient n un entier naturel non nul et a un réel non nul. Montrer l'égalité suivante :

$$\frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a} - 1\right)^n = \frac{(a-1)^n}{na^n}.$$

3. Pour n un entier naturel, on note $u_n = (-3)^n + 2 \times 3^{n+1} - 4 \times 3^n$. En factorisant l'expression, montrer que u_n vaut 3^n lorsque n est impair et vaut 3^{n+1} lorsque n est pair.