Interrogation du 23/03/2026

1. On considère la fonction
$$f : \begin{array}{ccc}]-\infty,-1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

   ① La fonction f est dérivable sur $]-\infty,-1]$ (et même sur $\mathbb{R}$...) et
$$\forall x \in]-\infty,-1], \qquad f'(x) = \exp(x)$$

   ② De plus, par positivité et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a
$$\forall x \in]-\infty,-1], \qquad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \exp(-1)$$

   Donc, d'après **l'inégalité des accroissements finis**, on a,
$$\forall a,b \in]-\infty,-1],\ \ a<b \qquad 0(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant \exp(-1)(b-a)$$
   c'est-à-dire,
$$\forall a,b \in]-\infty,-1], \qquad 0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e}(b-a)$$

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$
   Donc la fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
   L'équation de la tangente en 1 de la courbe de la fonction f est donnée par
$$y = f'(1)(x-1)+f(1) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$
   Comme la fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier au dessous de sa tangente en 1 donc,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$