

## Interrogation du 04/05/2026

1. Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a :

$$u \in F \Leftrightarrow x + 2y + z = 0$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple  $x$  - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici  $y$  et  $z$ .

$$u \in F \Leftrightarrow x = -2y - z$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F &\Leftrightarrow u = (-2y - z, y, z) \\ &\Leftrightarrow u = y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Donc,

$$F = \text{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

est génératrice de  $F$ . On peut remarquer que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car il n'existe pas de scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car sinon} \quad \begin{cases} -1 = -2\lambda \\ 0 = \lambda \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \lambda \text{ absurde...}$$

Donc la famille est libre.

Finalement, la famille  $(u_1, u_2)$  est une base de  $F$ . Ainsi,  $F$  est de dimension finie et

$$\dim(F) = \text{card}(u_1, u_2) = 2$$

2. Montrons que  $F$  et  $G$  sont de même dimension.

- L'espace  $F$  est de dimension 2 (ex 1)

- La famille  $((1, 1, -3), (1, -2, 3))$  génère  $G$  par construction et de plus, c'est une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc la famille  $((1, 1, -3), (1, -2, 3))$  est une base de  $G$ . On en déduit que  $G$  est de dimension 2.

Montrons que  $G \subset F$ . Par stabilité par combinaison linéaire, il suffit de montrer que

$$(1, 1, -3) \in F \quad \text{et} \quad (1, -2, 3) \in F.$$

Or

$$1 + 2 \times 1 + (-3) = 0 \quad \text{donc} \quad (1, 1, -3) \in F$$

et

$$1 + (-2) \times 2 + 3 = 0 \quad \text{donc} \quad (1, -2, 3) \in F$$

Donc  $G \subset F$ . Comme  $G \subset F$  et que les deux ensembles sont de même dimension, on en déduit que  $G = F$ .