2

Fonctions usuelles

1 La fonction inverse

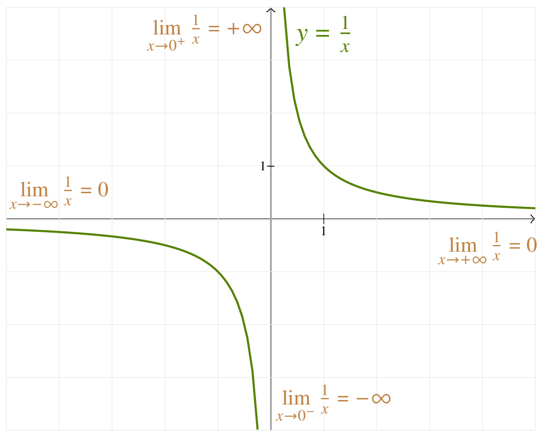
Définition 1.1 La fonction *inverse* est la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Proposition 1.2 — Propriétés de la fonction inverse.

- Le domaine de définition de la fonction inverse est $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- La fonction inverse n'admet pas de majorant ni pas de minorant sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$



2 La fonction racine carrée

Définition 2.1 La fonction *racine carrée* est la fonction suivante :

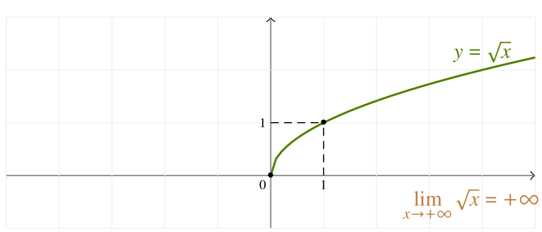
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, le réel $y = \sqrt{x}$ est l'unique réel positif tel que $y^2 = x$.

Proposition 2.2 — Propriétés de la fonction racine carrée.

- Le domaine de définition de la fonction racine carrée est $\mathbb{R}_+$.
- La fonction racine carrée est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction racine carrée n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}_+$ mais est minorée par 0 (ou par $-1, \ldots$) sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x \in]0, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



Proposition 2.3 — Règles de calcul sur les racines carrées. Soient a et b des entiers <u>positifs</u>. On a :

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b},\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (\text{si } b\neq 0),\qquad \left(\sqrt{a}\right)^2=a$$

On a aussi,

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & \text{si } a\geq 0\\ -a & \text{sinon.}\end{cases}$$

! On ne dispose pas de règles pour l'addition de deux racines. De manière générale,

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Par exemple,

$$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\qquad\text{alors que}\qquad \sqrt{1}+\sqrt{1}=1+1=2.$$

Exercice 2.4 Écrire ces nombres sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible.

a. $\sqrt{1300}$ b. $3\sqrt{2}\times(-4\sqrt{10})$, c. $5\sqrt{3}+4\sqrt{75}-3\sqrt{48}$ d. $\dfrac{\sqrt{480}}{\sqrt{2}\times\sqrt{20}}$

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour simplifier une racine carrée, il faut décomposer le nombre sous la racine en produit de nombres et faire apparaître des carrés.

a. $\sqrt{1300} = \sqrt{13\times 10^2}=10\sqrt{13}$

b. $3\sqrt{2}\times(-4\sqrt{10}) = -12\sqrt{5\times 2^2}=-24\sqrt{5}$

c. $5\sqrt{3}+4\sqrt{75}-3\sqrt{48} = 5\sqrt{3}+4\sqrt{3\times 5^2}-3\sqrt{3\times 4^2}=13\sqrt{3}$

d. $\frac{\sqrt{480}}{\sqrt{2}\times\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{2\times6\times4\times10}{2\times2\times10}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Exercice 2.5 Montrer que $\sqrt{117}+\sqrt{13}=\sqrt{208}$.

Gestes Invisibles/Automatismes. Attention, les racines carrées se comportent mal avec l'addition ! Comme les nombres sont positifs, il est plus équivalent (et plus facile) de montrer l'égalité des carrés des deux nombres. Plus précisément,

$$\sqrt{117}+\sqrt{13}=\sqrt{208}\qquad\Leftrightarrow\left(\sqrt{117}+\sqrt{13}\right)^2=208$$

En développant l'identité remarquable, on obtient,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{117}+\sqrt{13}\right)^2 &= \left(\sqrt{117}\right)^2+2\sqrt{117}\times\sqrt{13}+\left(\sqrt{13}\right)^2\\ &= 117+2\sqrt{117\times 13}+13\\ &= 130+2\sqrt{3^2\times 13^2}\\ &= 130+2\times3\times13\\ &= 208\end{aligned}$$

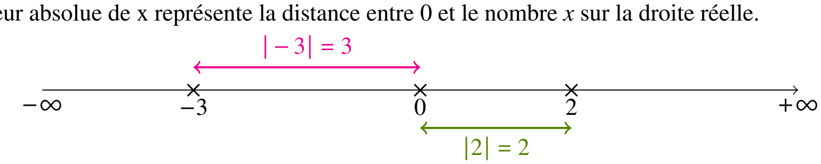
3 La fonction valeur absolue

3.1 La valeur absolue

Définition 3.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue* de x, notée $|x|$, est le réel défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

? La valeur absolue de x représente la distance entre 0 et le nombre x sur la droite réelle.



Exemple 3.2 On a

$$|17| = 17, \quad |-3| = 3, \quad \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}, \quad |\pi - 3| = \pi - 3, \quad |\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$$

Exemple 3.3 Considérons la fonction suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |3 - 2x| \end{array}$$

Donner une expression de f sans utiliser de valeur absolue.

En faisant une disjonction de cas selon le signe de $3 - 2x$, on obtient le raisonnement suivant.

- Lorsque $3 - 2x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant \frac{3}{2}$, on a $f(x) = |3 - 2x| = 3 - 2x$.
- Lorsque $3 - 2x \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant \frac{3}{2}$, on a $f(x) = |3 - 2x| = -(3 - 2x) = -3 + 2x$.

Donc, finalement, la fonction f s'écrit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x \leqslant \frac{3}{2} \\ -3 + 2x & \text{si } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases} \end{array}$$

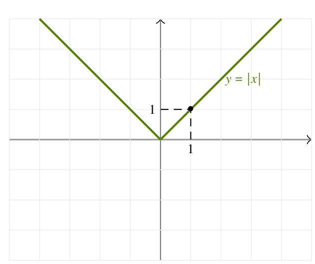
3.2 La fonction valeur absolue

Définition 3.4 La fonction *valeur absolue* est la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

Proposition 3.5 — Propriétés de la fonction valeur absolue.

- Le domaine de définition de la fonction valeur absolue est $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue est paire sur $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- La fonction valeur absolue n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}$ mais est minorée par 0 (ou par -1 ou ...) sur $\mathbb{R}$.



3.3 Règles de calcul pour la valeur absolue

Proposition 3.6 — Règles de calcul pour la valeur absolue.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|-x| = |x|$.
3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|xy| = |x| \times |y|$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|x^n| = |x|^n$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

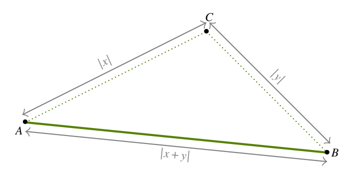
Attention, $|x+y| \neq |x| + |y|$. Par exemple,

$$|-1+2| = |1| = 1 \quad \text{alors que} \quad |-1| + |2| = 1+2 = 3.$$

Proposition 3.7 — Inégalité triangulaire. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Ce théorème traduit le fait que la distance la plus courte entre deux points est la ligne droite : le plus efficace pour aller d'un point A à un point B est d'aller tout droit, sans passer par un troisième point C qui ne serait pas sur la ligne droite.



Exemple 3.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{|-1|^n}{|n|} = \frac{1^n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Exemple 3.9 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| \leqslant 2.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On doit majorer la valeur absolue d'une somme : on utilise l'inégalité triangulaire.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient,

$$\left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| \leqslant |(-1)^n| + \left|\frac{1}{n}\right|$$

Or, $|(-1)^n| = 1$ et $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Donc on obtient,

$$\left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

Or, $n \geqslant 1$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, $\frac{1}{n} \leqslant 1$. Donc, finalement, on obtient,

$$\left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| \leqslant 1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + 1 = 2$$

3.4 Résolution d'équations et inéquations impliquant la valeur absolue

Proposition 3.10 — Équation avec valeur absolue. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a

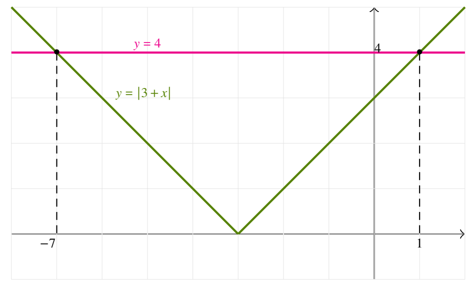
$$|x| = a \iff x = a \quad \text{ou} \quad x = -a.$$

Exemple 3.11 Résoudre l'équation $|3+x| = 4$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |3+x| = 4 &\iff 3+x = 4 \text{ ou } 3+x = -4 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -7 \end{aligned}$$

Cette équation admet exactement deux solutions, données par 1 et -7.

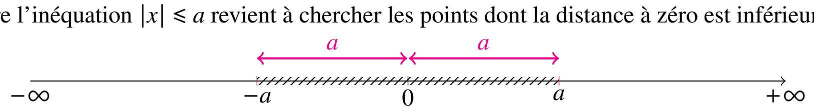


Proposition 3.12 — Inéquation avec valeur absolue. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a

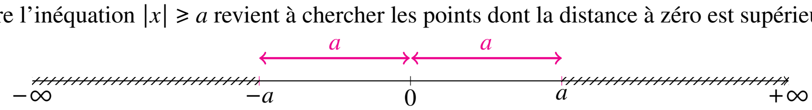
1. $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a.$
2. $|x| \geqslant a \iff x \geqslant a \ \text{ou} \ x \leqslant -a.$

Les mêmes équivalences sont vraies avec des inégalités strictes à la place des inégalités larges.

Résoudre l'inéquation $|x| \leqslant a$ revient à chercher les points dont la distance à zéro est inférieure à a.



Résoudre l'inéquation $|x| \geqslant a$ revient à chercher les points dont la distance à zéro est supérieure à a.



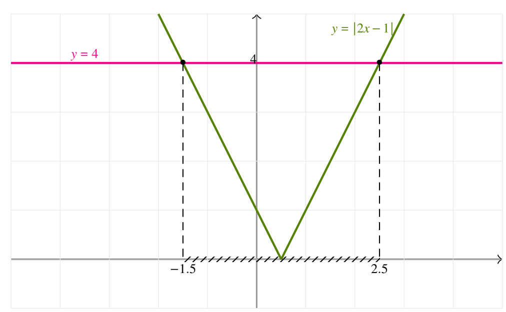
Exemple 3.13 Résoudre l'inéquation $|2x-1| \leqslant 4$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |2x-1| \leqslant 4 &\iff -4 \leqslant 2x-1 \leqslant 4 \\ &\iff -3 \leqslant 2x \leqslant 5 \\ &\iff -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donné par l'intervalle

$$\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$$



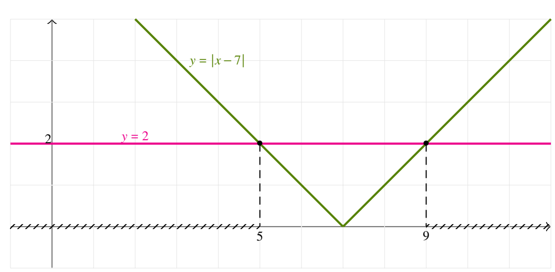
Exemple 3.14 Résoudre l'inéquation $|x-7| > 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |x-7| > 2 &\iff x-7 > 2 \ \text{ou} \ x-7 < -2 \\ &\iff x > 9 \ \text{ou} \ x < 5 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donné par l'intervalle

$$]-\infty, 5[\cup]9, \infty[$$



4 La fonction partie entière

Définition 4.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier n est appelé la *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$. Autrement dit, la partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Exemple 4.2 Calculer les parties entières suivantes.

$$\lfloor 2.5 \rfloor = 2, \qquad \lfloor -1.3 \rfloor = -2, \qquad \lfloor 1 \rfloor = 1, \qquad \lfloor \pi \rfloor = 3.$$

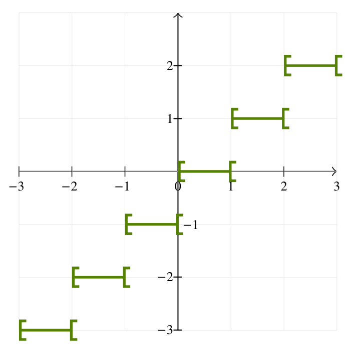
Définition 4.3 La fonction *partie entière* est la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

Proposition 4.4 — Propriétés de la fonction partie entière.

- Le domaine de définition de la fonction partie entière est $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière n'admet pas de majorant ni de minorant sur $\mathbb{R}$.

! La fonction partie entière n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $2 < 2.5$ mais $\lfloor 2 \rfloor = 2 = \lfloor 2.5 \rfloor$. Elle est constante sur tous les intervalles de la forme $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$. On dit qu'elle est constante par morceaux.



! La fonction partie entière est une fonction en escalier, elle est discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x vérifie l'inégalité suivante :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Démonstration. Par définition, la partie entière vérifie les deux inégalités suivantes :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x \qquad \text{et} \qquad x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

On en déduit donc que

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x \qquad \text{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor,$$

ce qui donne le résultat. ■

5 La fonction logarithme

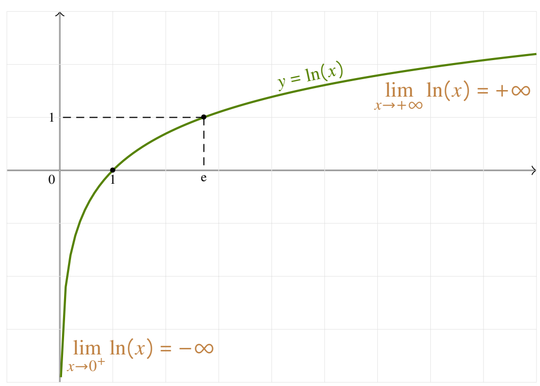
Définition 5.1 La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est l'unique primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1. Autrement dit, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Proposition 5.2 — Valeurs particulières.
1. Par définition, on a $\ln(1) = 0$.
2. Il existe un unique réel $\mathrm{e} \in]0,+\infty[$ tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$. On a $2 < \mathrm{e} < 3$ (en fait $\mathrm{e} \approx 2.72$). Ce nombre est appelé le nombre d'Euler.

Proposition 5.3 — Propriétés de la fonction logarithme.
- Le domaine de définition du logarithme est $]0,+\infty[$.
- La fonction logarithme est ni paire, ni impaire sur $]0,+\infty[$.
- La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- La fonction logarithme n'admet pas de majorant, ni de minorant sur $]0,+\infty[$.
- La fonction logarithme est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$$



Proposition 5.4 — Relation fondamentale. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Proposition 5.5 — Propriétés algébriques. Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

a. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ b. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

c. $\ln(x^n) = n\ln(x)$ d. $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Démonstration. Prouvons la première propriété. Soit $x \in]0,+\infty[$. *Comme* $\frac{1}{x}$ *est dans* $]0,+\infty[$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ *est bien défini*. De plus, en utilisant la relation de la Proposition 5.4, on a

$$\ln(1) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $\ln(1) = 0$ donc on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

■

Exemple 5.6 Écrire $\ln(12)$ et $\ln\left(\frac{16}{3}\right)$ sous la forme $a\ln(2)+b\ln(3)$ (avec a et b des entiers relatifs).

En décomposant en produits le nombre à l'intérieur du logarithme, on obtient,

$$\begin{aligned}
\ln(12) &= \ln(2^2\times 3) = \ln(2^2)+\ln(3) = 2\ln(2)+\ln(3)\\
\ln\left(\tfrac{16}{3}\right) &= \ln(16)-\ln(3) = \ln(2^4)-\ln(3) = 4\ln(2)-\ln(3)
\end{aligned}$$

Exemple 5.7 Simplifier au maximum le nombre

$$A = \frac{1}{2}\ln(125)-2\ln(5)+\ln(\sqrt{5})$$

- **Première manière de faire (en «séparant au maximum les logarithmes»).** On a,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\ln(125)-2\ln(5)+\ln(\sqrt{5})\\
&= \frac{1}{2}\ln(5^3)-2\ln(5)+\ln(5^{\frac{1}{2}})\\
&= \frac{3}{2}\ln(5)-2\ln(5)+\frac{1}{2}\ln(5)\\
&= 0
\end{aligned}$$

- **Deuxième manière de faire (en «regroupant au maximum les logarithmes»).** On a,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\ln(125)-2\ln(5)+\ln(\sqrt{5})\\
&= \ln(\sqrt{125})-\ln(5^2)+\ln(\sqrt{5})\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{125}\times\sqrt{5}}{5^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{5^3}\times\sqrt{5}}{5^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{5\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{5^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{5\times 5}{5^2}\right)\\
&= \ln(1)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Proposition 5.8 — Logarithme et inégalité. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a

$$\ln(x) = \ln(y) \Longleftrightarrow x = y, \qquad \ln(x) \leqslant \ln(y) \Longleftrightarrow x \leqslant y, \qquad \ln(x) \geqslant \ln(y) \Longleftrightarrow x \geqslant y.$$

Exemple 5.9 Résoudre l'équation $\ln(4x-1) = \ln(2-x)$ d'inconnue x en précisant au préalable le domaine de validité de cette équation.

- Cette équation est licite si et seulement si
$$4x - 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad 2 - x > 0$$
c'est-à-dire
$$x > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad x < 2$$
Donc, cette équation est valable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{4}, 2\right[$.
- Soit $x \in \left]\frac{1}{4}, 2\right[$. En raisonnant par équivalence, on obtient,
$$\begin{aligned} \ln(4x-1) = \ln(2-x) \quad &\Longleftrightarrow \quad 4x - 1 = 2 - x \\ &\Longleftrightarrow \quad 5x = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Finalement, cette équation admet une unique solution donnée par $\frac{3}{5}$.

Vérification.

D'une part, $\ln\left(4 \times \frac{3}{5} - 1\right) = \ln\left(\frac{7}{5}\right)$ et d'autre part, $\ln\left(2 - \frac{3}{5}\right) = \ln\left(\frac{7}{5}\right)$ ✓

Exemple 5.10 Résoudre l'inéquation $3^{2n} > 10^8$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En raisonnant par équivalence, on obtient,

$$\begin{aligned} 3^{2n} > 10^8 \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln(3^{2n}) > \ln(10^8) && \text{car la fct log strict. croissante sur }]0,+\infty[\\ &\Longleftrightarrow \quad 2n\ln(3) > 8\ln(10) \\ &\Longleftrightarrow \quad n > \frac{8\ln(10)}{2\ln 3} && \text{car } \ln(3) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad n > \frac{4\ln(10)}{\ln 3} \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{4\ln(10)}{\ln 3} \approx 8.38$$

Donc, l'ensemble des solutions de cette inéquation est donnée par,

$$\{9, 10, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 9\}$$

6 La fonction exponentielle

Définition 6.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique t dans $]0, +\infty[$ tel que $\ln(t) = x$, que l'on note $\exp(x)$ ou e^x. On a donc

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}, \qquad \ln(\exp(x)) = x.$$

La fonction *exponentielle* est la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

Proposition 6.2 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, +\infty[$. On a

$$\ln(t) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \exp(x).$$

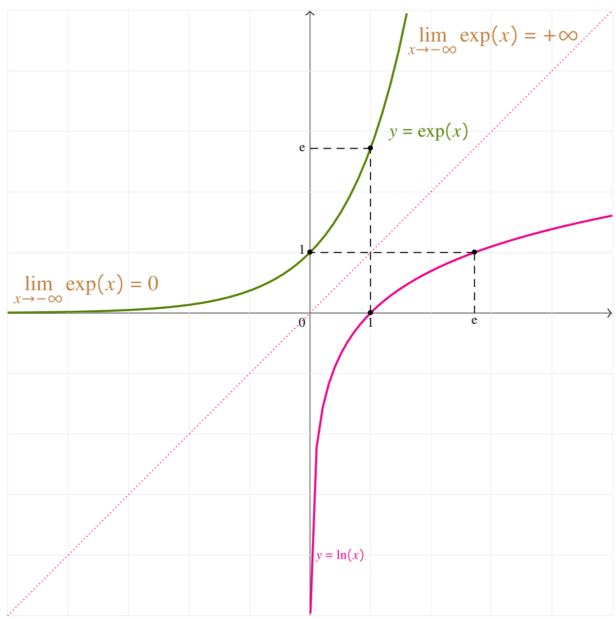
En particulier,

$$\text{pour tout } t \text{ dans }]0, +\infty[, \qquad \exp(\ln(t)) = t.$$

Proposition 6.3 — Propriétés de la fonction exponentielle.

- Le domaine de définition de la fonction exponentielle est $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}$ mais est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \exp(x)$$



Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 6.4 — Valeurs particulières.

1. On a $\exp(0) = 1$.
2. On a $\exp(1) = e$ (on rappelle que $e \approx 2.72$ est appelé le nombre d'Euler).

Proposition 6.5 — Relation fondamentale. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Proposition 6.6 — Propriétés algébriques. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \qquad \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

? Ces propriétés algébriques sont les mêmes que pour les puissances, cela justifie la notation $\exp(x) = \mathrm{e}^x$:
$$\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}, \qquad (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}, \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}, \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}.$$

Exemple 6.7 Écrire $\mathrm{e}^5\mathrm{e}^{-4}\mathrm{e}^2$ et $\frac{1}{\mathrm{e}^6\mathrm{e}^4}$ sous la forme e^k avec k le plus simple possible.
$$\mathrm{e}^5\mathrm{e}^{-4}\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{5-4+2} = \mathrm{e}^3.$$
$$\frac{1}{\mathrm{e}^6\mathrm{e}^4} = \mathrm{e}^{-6}\mathrm{e}^{-4} = \mathrm{e}^{-6-4} = \mathrm{e}^{-10}$$

Exemple 6.8 Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer l'expression $(4e^x + e^{-x})^2$ et factoriser $e^{9x} + e^{2x}$.
$$(4e^x + e^{-x})^2 = (4e^x)^2 + 2 \times 4e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 = 16e^{2x} + 8 + e^{-2x}$$
$$e^{9x} + e^{2x} = e^{7x+2x} + e^{2x} = e^{7x}e^{2x} + e^{2x} = e^{2x}(e^{7x}+1).$$

Exemple 6.9 On définit la fonction ch par,
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$
Calculer $\mathrm{ch}(\ln 2)$.

Par définition de la fonction ch, on obtient directement que
$$\mathrm{ch}(\ln(2)) = \frac{\mathrm{e}^{\ln 2} + \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 + \mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{2})}}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

Exemple 6.10 Montrer que,
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad -x + \ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln(\mathrm{e}^{-x}+1).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,
$$\begin{aligned} -x + \ln(1+\mathrm{e}^x) &= \ln(\exp(-x)) + \ln(1+\mathrm{e}^x) \\ &= \ln(\mathrm{e}^{-x} \times (1+\mathrm{e}^x)) \\ &= \ln(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x+x}) \\ &= \ln(\mathrm{e}^{-x}+1) \end{aligned}$$

7 Les fonctions puissances entières

Définition 7.1 Soit n un entier naturel. La fonction *puissance* n est la fonction suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$. Par convention, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.

Exercice 7.2 Calculer les puissances suivantes.

$$2^0 = 1 \qquad 5^1 = 5 \qquad (-6)^1 = -6$$

$$2^4 = 16 \qquad (-5)^3 = -125 \qquad (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition 7.3 — Propriétés de la fonction puissance entière, cas pair.

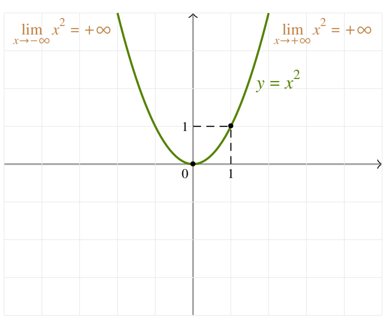
- Le domaine de définition de la fonction puissance est $\mathbb{R}$.
- La fonction puissance est paire sur $\mathbb{R}$.
- La fonction puissance est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- La fonction puissance n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}$ mais est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.
- La fonction puissance est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

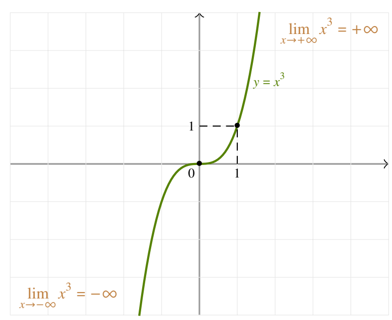
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Proposition 7.4 — Propriétés de la fonction puissance entière, cas impair.

- Le domaine de définition de la fonction puissance est $\mathbb{R}$.
- La fonction puissance est impaire.
- La fonction puissance est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction puissance n'admet pas de majorant, pas de minorant et pas d'extrema.
- La fonction puissance est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$





Proposition 7.5 — Règles de calcul sur les puissances. Soient a, b des réels non nuls et n, m des entiers.

a. $a^n \times a^m = a^{n+m}$ b. $(a^n)^m = a^{n\times m}$ c. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

d. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ e. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ f. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exercice 7.6 Soient x, y deux nombre réel. Simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
x^2 \times x^3 &= (x\times x)\times(x\times x\times x) = x^{2+3} = x^5\\
(x^2)^3 &= x^2\times x^2\times x^2 = x\times x\times x\times x\times x\times x = x^{2\times 3} = x^6\\
\frac{2^7}{2^5} &= \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}} = 2^{7-5} = 2^2 = 4\\
(xy^2)^2 &= (x\times y^2)^2 = x^2\times(y^2)^2 = x^2\times y^{2+2} = x^2y^4\\
\left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \frac{2^3}{3^3} = \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3} = \frac{8}{27}
\end{aligned}$$

Exercice 7.7 Exprimer le nombre suivant sous la forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et de 5.

$$A = \frac{5^7\times 10^{-4}\times 3^9}{10^{-5}\times 3^7\times 5^{10}}$$

On a,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5^7\times 10^{-4}\times 3^9}{10^{-5}\times 3^7\times 5^{10}}\\
&= \frac{5^7\times(2\times5)^{-4}\times 3^9}{(2\times5)^{-5}\times 3^7\times 5^{10}}\\
&= 5^{7-4-(-5)+10}\times 2^{-4-(-5)}\times 3^{9-7}\\
&= 5^{-2}\times 2^1\times 3^2
\end{aligned}$$

Exercice 7.8 Soient x un réel et y un nombre réel non nul. Simplifier l'expression suivante.

$$\left(\frac{2(xy)^2}{y^3}\right)^4 = \left(\frac{2x^2y^2}{y^3}\right)^4 = \left(\frac{2x^2}{y}\right)^4 = \frac{16x^8}{y^4}$$

Exercice 7.9 Soient x et y deux réels non nuls. Écrire sous la forme d'une unique fraction l'expression suivante.

$$\left(\frac{1}{xy}\right)^2 - \frac{3}{yx^4} = \frac{1}{x^2y^2} - \frac{3}{yx^4} = \frac{x^2-3y}{x^4y^2}$$

8 Les fonctions puissances réelles

La propriété du logarithme $\ln(x^n) = n\ln(x)$ entraine, en composant par l'exponentielle, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$x^n = \exp(n\ln(x)).$$

Cela nous permet d'étendre la notion de puissance pour des valeurs de n non entières et pour des réels x strictement positifs.

Définition 8.1 Soit a un réel. La fonction *puissance a* est la fonction suivante

$$\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = \exp(a\ln(x)) \end{array}$$

Exemple 8.2 Soient $x \in]0,+\infty[$ et $a \in \mathbb{R}$.

$$x^1 = x, \qquad x^0 = 1, \qquad x^\pi = e^{\pi\ln(x)}, \qquad 1^a = 1$$

Proposition 8.3

1. Lorsque a est un entier, la fonction puissance a coïncide avec la fonction puissance définie pour les entiers, c'est-à-dire que, pour tout $x > 0$,
$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = e^{n\ln(x)}.$$
2. La fonction puissance $\frac{1}{2}$ coïncide avec la fonction racine carrée, c'est-à-dire que pour tout $x > 0$, on a
$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$
3. La fonction puissance -1 coïncide avec la fonction inverse, c'est-à-dire que pour tout $x > 0$, on a
$$x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

On retrouve les mêmes propriétés algébriques que pour les puissances entières.

Proposition 8.4 — Règles de calcul sur les puissances. Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{lllllllll} 1.\ x^a \times x^b & = & x^{a+b} & 2.\ (x^a)^b & = & x^{a\times b} & 3.\ \frac{x^a}{x^b} & = & x^{a-b} \\ 4.\ (x\times y)^a & = & x^a \times y^a & 5.\ \left(\frac{x}{y}\right)^a & = & \frac{x^a}{y^a} & 6.\ x^{-a} & = & \frac{1}{x^a} \end{array}$$

Les règles de calcul concernant les fonctions exponentielle, logarithme et puissances entières s'étendent aux puissances non entières.

Proposition 8.5

1. Pour tout a réel et $x > 0$, on a $\ln(x^a) = a\ln(x)$.
2. Pour tout a réel et $x \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{e}^x)^a = \mathrm{e}^{ax}$.

Exemple 8.6 Calculer les puissances suivantes.

$$2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{12}} \qquad 2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{4}} = (2\times 3)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}}$$

$$(5^{\frac{1}{4}})^4 = 5^{\frac{1}{4}\times 4} = 5^1 = 5 \qquad \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}$$

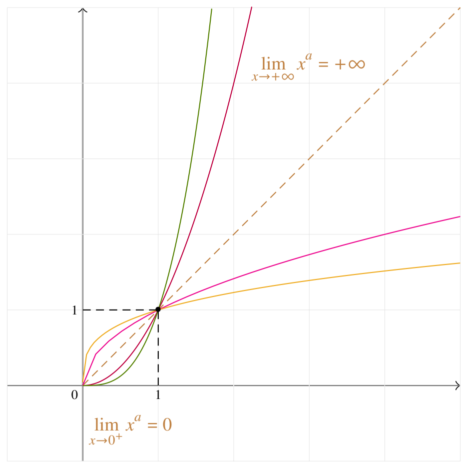
Cas où $a > 0$

Par exemple, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$,...

Proposition 8.7 — Propriétés de la fonction puissance, cas $a > 0$.

- Le domaine de définition de la fonction puissance est $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance est ni paire, ni impaire sur $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance n'admet pas de majorant sur $]0, +\infty[$ mais est minorée par 0 sur $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad f'(x) = ax^{a-1}$$



Cas où $a < 0$

Par exemple, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$,...

Proposition 8.8 — Propriétés de la fonction puissance, cas $a < 0$.

- Le domaine de définition de la fonction puissance est $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance est ni paire, ni impaire sur $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance n'admet pas de majorant sur $]0, +\infty[$ mais est minorée par 0 sur $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad f'(x) = ax^{a-1}$$