Correction Interrogation du 26/05/2026

1. Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_1 = \int_1^2 (x\ln(x))\mathrm{d}x$$

On pose, pour tout $x \in [1,2]$:

$$\begin{array}{lll} u(x) = \ln(x) & \text{donc} & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & \text{donc} & v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1,2]$ donc par intégration par porties, on a :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_1^2 x\ln(x)dx &= \left[\ln(x) \times \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= 2\ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{2^2} \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 1^2\right) \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2. Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variables «$x = \sqrt{t}$» :

$$I_2 = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

La fonction

$$x \mapsto 2(1-x)$$

est continue sur $[1,2]$
La fonction

$$t \mapsto \sqrt{t}$$

est de classe C^1 sur $[1,4]$
Donc par changement de variables " $x = \sqrt{t}$ ", on a :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_1^2 \frac{1-x}{x} 2x dx \\ &= 2\int_1^2 (1-x) dx \\ &= 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 2\left(2 - \frac{2^2}{2} - \left(1 - \frac{1^2}{2}\right)\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$