Exercice 1

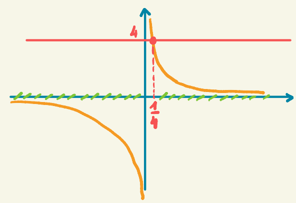
1. Si $x \in]-\infty, 0[$ alors l'inéquation $\frac{1}{x} < 4$ est toujours vraie.

Si $x \in]0, +\infty[$ alors

$$\frac{1}{x} < 4 \iff x > \frac{1}{4} \quad \text{(car } x>0 \text{ et } 4>0\text{)}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{4}, +\infty[.}$

On peut résoudre graphiquement l'équation :



2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+1} - 1 &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2+1} \\
&= \frac{1-(x^2+1)}{x^2+1} \\
&= \frac{1-x^2-1}{x^2+1} \\
&= -\frac{x^2}{x^2+1} \\
&\leq 0 .
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

Exercice 2

1. a) $\boxed{\sqrt{28}+\sqrt{63}} = \sqrt{2^2\times 7} + \sqrt{3^2\times 7}$
$= \sqrt{2^2}\times\sqrt{7} + \sqrt{3^2}\times\sqrt{7}$
$= 2\times\sqrt{7} + 3\times\sqrt{7}$
$\boxed{= 5\sqrt{7}}$

b) $\boxed{\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}} = \sqrt{6} + \sqrt{2^2\times 6} + \sqrt{3^2\times 6}$
$= \sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$
$\boxed{= 6\sqrt{6}}$

c) $\boxed{9\sqrt{20} - 5\sqrt{45} - 2\sqrt{180}} = 9\sqrt{2^2\times 5} - 5\sqrt{3^2\times 5} - 2\sqrt{2^2\times 3^2\times 5}$
$= 9\times 2\times\sqrt{5} - 5\times 3\times\sqrt{5} - 2\times 2\times 3\times\sqrt{5}$
$= 18\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$
$\boxed{= -9\sqrt{5}}$

2. Notons $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En mettant les fractions au même dénominateur, on obtient,

$$\boxed{A} = \frac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)} - \frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2}}+1-(\cancel{\sqrt{2}}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

en utilisant au dénominateur l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$= \frac{2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$$

car $\forall x \geq 0,\ (\sqrt{x})^2 = x$.

$$= \frac{2}{2-1}$$

$$\boxed{= 2}$$

Donc A est bien un nbre entier (égal à 2).

3. Soit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On a :

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\times(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-4}$$

Donc $\boxed{\dfrac{1}{\varphi}} = \dfrac{2(1-\sqrt{5})}{-4}$

$$= -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{= \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

On a également

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} - \frac{4}{4}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2(1+\sqrt{5})-4}{4}$$

$$= \frac{\cancel{1}+\cancel{2\sqrt{5}}+\cancel{5}-\cancel{2}-\cancel{2\sqrt{5}}-\cancel{4}}{4}$$

$$= 0$$

Donc $\boxed{\varphi^2 = 1+\varphi.}$

Exercice 3

1.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|x+3| = 3 \iff x+3=3 \quad \text{ou} \quad x+3=-3$$
$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x=-6$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\{0, -6\}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|x-3| \geq 4 \iff x-3 \geq 4 \quad \text{ou} \quad x-3 \leq -4$$
$$\iff x \geq 7 \quad \text{ou} \quad x \leq -1$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{]-\infty, -1] \cup [7 ; +\infty[}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

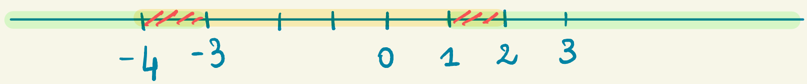
$$|7-3x| \leq 5 \iff -5 \leq 7-3x \leq 5$$
$$\iff -12 \leq -3x \leq -2$$
$$\iff 12 \geq 3x \geq 2$$
$$\iff 4 = \frac{12}{3} \geq x \geq \frac{2}{3}$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left[\frac{2}{3}, 4\right]}$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$2 \leq |x+1| \leq 3 \iff |x+1| \geq 2 \text{ et } |x+1| \leq 3$$
$$\iff (x+1 \geq 2 \text{ ou } x+1 \leq -2) \text{ et } (-3 \leq x+1 \leq 3)$$
$$\iff (x \geq 1 \text{ ou } x \leq -3) \text{ et } (-4 \leq x \leq 2)$$



Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{[-4,-3] \cup [1,2]}$$

2. Par définition de la valeur absolue,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6 & \underline{\text{si}} \quad x^2-5x+6 \geq 0 \\ -(x^2-5x+6) & \underline{\text{si}} \quad x^2-5x+6 < 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc de déterminer le signe du polynôme $x \mapsto x^2-5x+6$.

Au Brouillon

$x^2-5x+6=0$

↳ $\Delta = (-5)^2 - 4\times 6 = 25-24 = 1$

↳ donc deux racines :

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

et $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{1}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

On trace le tableau de signe de $x \mapsto x^2-5x+6$:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

↖ ici signe = - signe du coeff dom.

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2-5x+6 & \text{si } x \in]-\infty, 2] \cup [3;+\infty[\\ -x^2+5x-6 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}}$$

3. Soient $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, $\left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x^n|}{|n|} = \frac{|x|^n}{n}$.

- D'une part, $0 \leqslant |x| \leqslant 1$.
  Or la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0,+\infty[$.
  Donc
  $$|x|^n \leqslant 1^n$$
  c'est-à-dire
  $$0 \leqslant |x|^n \leqslant 1. \quad (*)$$

- D'autre part, $n \geqslant 1 \geqslant 0$
  Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.
  Donc
  $$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1. \quad (**)$$

- Conclusion. En multipliant, les deux inégalités $(*)$ et $(**)$ (qui n'impliquent que des nombres positifs), on a:
  $$|x|^n \times \frac{1}{n} \leqslant 1 \times 1$$
  c-à-d
  $$\boxed{\left|\frac{x^n}{n}\right| \leqslant 1}$$

Exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Comme x est un entier, on a $\lfloor x \rfloor = x$. Donc $f(x) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = 0$.

2. On a

$$f(2.5) = 2.5 - \lfloor 2.5 \rfloor = 2.5 - 2 = 0.5$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

3. Soit $x \in [0, 1[$. Comme

$$0 \leq x < 1,$$

on a $\lfloor x \rfloor = 0$.

Donc, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = x$.

4. * Commençons par montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x+1 < \lfloor x \rfloor + 2$.

Ainsi le nombre $k = \lfloor x \rfloor + 1$ est un entier vérifiant

$$k \leq x+1 < k+1$$

Par définition de la partie entière,

$$\lfloor x+1 \rfloor = k = \lfloor x \rfloor + 1.$$

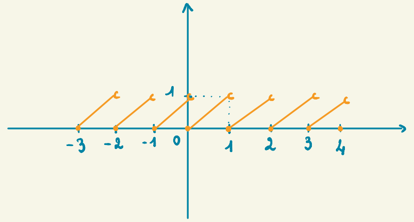
* Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x+1) &= x+1 - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= x+1 - (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= x+1 - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= x - \lfloor x \rfloor \\ &= f(x) \end{aligned}$$

en utilisant ce que l'on vient de prouver

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$

5.



Exercice 5

- Soit $x > 0$. On a :

$$\boxed{\ln(x) = -7 \iff x = e^{-7}}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\exp(x) = 4 \iff x = \ln 4}$$

- Soit $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$. On a :

$$\boxed{\ln(3x-1) \geqslant \ln(2)} \iff 3x-1 \geqslant 2$$
$$\iff 3x \geqslant 3$$
$$\boxed{\iff x \geqslant 1}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{e^{-3x+5} < 2} \iff -3x+5 < \ln 2$$
$$\iff -3x < \ln 2 - 5$$
$$\iff x > -\frac{1}{3}(\ln 2 - 5)$$
$$\boxed{\iff x > -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{5}{3}}$$

- Soit $x \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$. On a :

$$\boxed{\ln(4x-1) \leqslant 3} \iff 4x-1 \leqslant e^3$$
$$\iff 4x \leqslant e^3 + 1$$
$$\boxed{\iff x \leqslant \frac{1}{4}(e^3+1)}$$

Exercice 6

1.a) $\boxed{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = -\ln(4)$

$= -\ln(2^2)$

$\boxed{= -2\ln(2)}$

1.b) $\boxed{\ln(8)+5\ln(2)} = \ln(2^3)+5\ln(2)$

$= 3\ln(2)+5\ln(2)$

$\boxed{= 8\ln(2)}$

1.c) $\boxed{\ln(\sqrt{32})} = \frac{1}{2}\ln(32)$

$= \frac{1}{2}\ln(2^5)$

$\boxed{= \frac{5}{2}\ln(2)}$

1d) $\boxed{\ln(10)-\ln(20)} = \ln(10) - \ln(2\times 10)$

$= \ln(10) - (\ln 2 + \ln 10)$

$= \cancel{\ln(10)} - \ln 2 - \cancel{\ln 10}$

$\boxed{= -\ln(2)}$

2.a) $\boxed{e^5 \times e^2 \times e^{-3}} = e^{5+2-3}$

$\boxed{= e^4}$

b) $\boxed{e^3 \times (e^{-4})^2} = e^3 \times e^{-4\times 2}$

$= e^3 \times e^{-8}$

$= e^{3-8}$

$\boxed{= e^{-5}}$

c) $\boxed{\frac{e^4 \times e^{-5}}{e}} = \frac{e^4 \times e^{-5}}{e^1}$

$= e^{4-5-1}$

$\boxed{= e^{-2}}$

d) $\boxed{\frac{e \times (e^5)^7}{e^{-9} \times e^4}} = e^{1+5\times 7-(-9+4)}$

$\boxed{= e^{41}}$

3. a) $\boxed{e^{2\ln(3)+\ln 4}} = e^{2\ln(3)} \times e^{\ln(4)}$

$= e^{\ln(3^2)} \times e^{\ln(4)}$

$= 3^2 \times 4$

$\boxed{= 36}$

b) $\boxed{e^{3\ln 2 - \ln 4}} = e^{3\ln(2)} \times e^{-\ln 4}$

$= e^{\ln(2^3)} \times e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$

$= 2^3 \times \frac{1}{4}$

$\boxed{= 2}$

c) $\boxed{\frac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}}} = \frac{e^{\ln 6} \times e}{e^{\ln 9} \times e^2}$

$\boxed{= \frac{6}{9} e^{-1}}$

d) $\boxed{e^{3\ln 3} + e^{2\ln 7}} = e^{\ln(3^3)} + e^{\ln(7^2)}$

$= 3^3 + 7^2$

$= 27 + 14$

$\boxed{= 41}$

e) $\boxed{e^{5\ln 3} \times e^{4\ln(9)} = 3^5 \times 9^4}$

f) $\boxed{\ln(1+e^5) + \ln\left(\frac{1}{1+e^{-5}}\right)} = \ln\left(e^5(1+e^{-5})\right) - \ln(1+e^{-5})$

$= \ln(e^5) + \cancel{\ln(1+e^{-5})} - \cancel{\ln(1+e^{-5})}$

$\boxed{= 5}$

4.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2-2x}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}} = e^{x^2+2x-(x+1)^2}$$

$$= e^{\cancel{x^2}+\cancel{2x}-(\cancel{x^2}+\cancel{2x}+1)}$$

$$\boxed{= e^{-1}}$$

c) Soit $x > 0$. On a :

$$\boxed{e^{2\ln(x)}} = e^{\ln(x^2)}$$

$$\boxed{= x^2}$$

d) Soit $x > 0$. On a :

$$\boxed{-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \ln\left(\frac{1}{2x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^2)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2\cancel{x}} \times \frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{= -\ln 2}$$

e) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\sqrt{e^{2x}} \times e^{-x}} = \left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{-x}$$

$$= e^{2x \times \frac{1}{2}} \times e^{-x}$$

$$= e^{x} \times e^{-x}$$

$$= e^{x-x}$$

$$= e^{0}$$

$$\boxed{= 1}$$

f) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\frac{e^{x^2-2x} \times \left(e^{x}\right)^2}{\left(e^{2x}\right)^3}} = e^{x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-2x\times 3}$$

$$\boxed{= e^{x^2-6x}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{A} = \left(e^{2x}+5\right)^2$$

$$= \left(e^{2x}\right)^2 + 2 \times e^{2x} \times 5 + 5^2$$

$$\boxed{= e^{4x} + 10e^{2x} + 25}$$

$$\boxed{B} = \left(e^{2x}-2\right)\left(e^{-x}+5\right)$$

$$= e^{2x} \times e^{-x} + 5e^{2x} - 2e^{-x} - 2 \times 5$$

$$\boxed{= e^{x} + 5e^{2x} - 2e^{-x} - 10}$$

$$\boxed{C} = 5e^{-4x} - 3e^{-4x} + 7e^{-4x}$$

$$= (5-3+7)e^{-4x}$$

$$\boxed{= 9e^{-4x}}$$

$$\boxed{D} = e^{2x} - 9x^2$$

$$= \left(e^{x}\right)^2 - (3x)^2$$

$$\boxed{= \left(e^{x}-3x\right)\left(e^{x}+3x\right)}$$

Exercice 7

1. $\boxed{A} = 2^3 \times (4\times 3)^2$

$= 2^3 \times 4^2 \times 3^2$

$= 8 \times 16 \times 9$

$\boxed{= 1152}$

$\boxed{B} = \frac{7^7}{7^4} = 7^{7-4}$

$= 7^3$

$\boxed{= 343}$

$\boxed{C} = \frac{(2^2)^3 \times 10 \times 4^{-2}}{15\times 8}$

$= \frac{2^6 \times 2 \times \cancel{5} \times (2^2)^{-2}}{3 \times \cancel{5} \times 2^3}$

$= 2^{6+1-3-2\times 2} \times 3^{-1}$

$\boxed{= \frac{1}{3}}$

2. Déjà tous les membres de l'égalité ont un sens pour $a \neq 0$ et $n \neq 0$ car $n \neq 0$, $a \neq 0$ et $n a^n \neq 0$.

Soient n entier naturel non nul et a un réel non nul.

$\frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a} - 1\right)^n = \frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{a}\right)^n$

$= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1-a}{a}\right)^n$

$= \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{(1-a)^n}{a^n}$

$= \frac{(-1 \times (1-a))^n}{n a^n}$

$= \frac{(a-1)^n}{n a^n}$

3. Soit n un entier naturel. On a :

$u_n = (-3)^n + 2 \times 3^{n+1} - 4 \times 3^n$

$= 3^n \times (-1)^n + 3^n \times 2 \times 3 - 3^n \times 4$

$= 3^n \times \left((-1)^n + 6 - 4\right)$

$= 3^n \times \left((-1)^n + 2\right)$

Donc

- si n est impair,

$\boxed{u_n} = 3^n \times (-1 + 2)$

$= 3^n \times 1$

$\boxed{= 3^n}$

- et si n est pair,

$\boxed{u_n} = 3^n \times (1 + 2)$

$= 3^n \times 3$

$\boxed{= 3^{n+1}}$