

## Correction Interrogation du 07/06/2026

1. On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2}$  d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}
 u \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -y + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow u = (x, x, 0) \\
 &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1, 1, 0))
 \end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0))$$

2. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

Donc, on obtient que

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{ker}(f)) = 3 - 1 = 2$$

Donc  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2, ou autrement dit,  $f$  est de rang 2.

3. On peut commencer par remarquer que

$$(1 - 1, -1) \in \text{Im}(f) \quad \text{car} \quad (1, -1, -1) = f(1, 0, 0)$$

et

$$(-1, -1, 2) \in \text{Im}(f) \quad \text{car} \quad (-1, -1, 2) = f(0, 0, 1)$$

Donc par stabilité par combinaison linéaire de  $\text{Im}(f)$ , on a

$$\text{Vect}((1, -1, -1), (-1, -1, 2)) \subset \text{Im}(f)$$

Or les deux ensembles sont de même dimension car,

-  $\text{Im}(f)$  est de dimension 2

- et  $\text{Vect}((1, -1, -1), (-1, -1, 2))$  est de dimension 2 car

\* la famille  $((1, -1, -1), (-1, -1, 2))$  en est une famille génératrice par construction

\* et est une famille libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires

Donc,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -1, -1), (-1, -1, 2))$$

et la famille

$$((1, -1, -1), (-1, -1, 2))$$

est une base de  $\text{Im}(f)$ .

4. L'application n'est ni injective, ni surjective, ni bijective