Chapitre 1 : Polynômes

1 Généralités sur les polynômes

1.1 Définitions

Définition 1.1 On appelle **polynôme** ou **fonction polynômiale** une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où

- n est un entier naturel,
- et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels appelés **coefficients** du polynôme P,
- en particulier a_0 est appelé le **coefficient constant** du polynôme.

L'ensemble des polynômes à coefficient réels est noté $\mathbb{R}[x]$.

Exemple 1.2

Fonction	Polynôme	Coefficient constant	Ensemble d'appartenance
$P_1 : x \mapsto 1 - 2x^3 + 5x^4$			
$P_2 : x \mapsto 0$			
$P_3 : x \mapsto -742x^7 + 6x^3 - 5x^2 + 2x - 3$			
$P_4 : x \mapsto a$ (pour $a \in \mathbb{R}$)			
$P_5 : x \mapsto 3 + 2x - 51\sqrt{x}$			
$P_6 : x \mapsto 4 + 2x + x^{\frac{5}{2}}$			

Exercice 1.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ défini par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels. Que vaut $P(0)$?

1.2 Opérations sur les polynômes

Proposition 1.4 Soient n et m deux entiers tel que $n < m$, P et Q deux polynômes donnés par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad \text{et} \qquad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions λP, $P+Q$ et PQ sont des polynômes. Plus précisément, on a

Multiple de P par λ	$(\lambda P) : x \mapsto \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n$
Somme de P et Q	$(P+Q) : x \mapsto a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_m x^m$
Produit de P et Q	$(PQ) : x \mapsto (a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \cdots$

Exemple 1.5 Soient P et Q deux polynômes définis par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^2 + x + 1 \qquad \text{et} \qquad Q(x) = x^3 - x + 2.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(-5Q)(x) =$$

$$(P+Q)(x) =$$

$$(PQ)(x) =$$

1.3 Degré d'un polynôme

Définition 1.6 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$ défini par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels avec $a_n \neq 0$.

- Le réel a_n est appelé le **coefficient dominant** du polynôme P.
- L'entier n est appelé le **degré** du polynôme, on note $\deg(P) = n$.

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On ne peut pas définir le degré du polynôme nul puisque tous ses coefficients sont nuls. Par convention, on pose que son degré est égal à $-\infty$.

Exemple 1.7

Polynôme	Deg	Coeff. dom.	Ensemble
$P_1 : x \mapsto 54 - 2x + 4x^5 - 112x^9$			
$P_2 : x \mapsto x^2 - x^4 + 3x^3$			
$P_3 : x \mapsto 6$			
$P_4 : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (pour a, b, c réels)			
$P_5 : x \mapsto 0$			

Proposition 1.8 Soient P et Q deux polynômes non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P') = \deg(P) - 1$ (si $P \notin \mathbb{R}_0[x]$, sinon $\deg(P') = -\infty$ si $P \in \mathbb{R}_0[x]$)

En général,

$$\deg(P+Q) \neq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

car les coefficients dominants peuvent s'annuler. Par exemple, considérons les polynômes P et Q donnés par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \qquad \text{et} \qquad Q(x) = -x^3.$$

Alors,

$$(P+Q)(x) =$$

Donc

$$\deg(P+Q) = \qquad \text{mais} \qquad \max(\deg(P), \deg(Q)) =$$

Exemple 1.9 Soient $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ et $Q \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = x^n, \qquad B(x) = (x-1)^2, \qquad R(x) = nx + 1 - n.$$

Déterminer le degré de Q.

1.4 Unicité d'un polynôme

Proposition 1.10 Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients (et de fait le même degré). En particulier, si deux polynômes sont de degré différents alors ils ne sont pas égaux.

Exemple 1.11 Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (ax^2 + bx + c)^2.$$

Exemple 1.12 Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2 Racines d'un polynôme

2.1 Définition

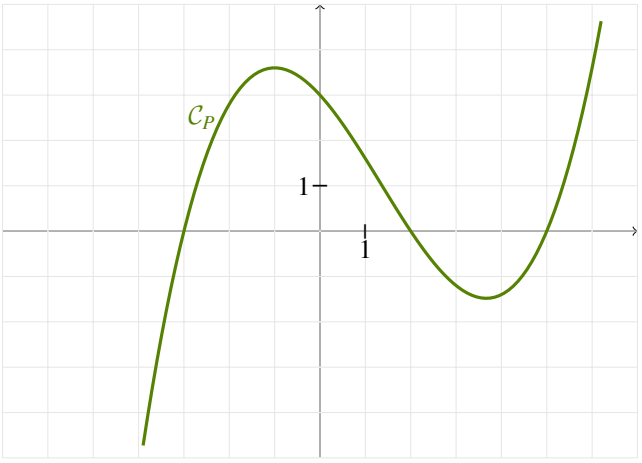
Définition 2.1 On dit qu'un réel α est une **racine** d'un polynôme P lorsque

$$P(\alpha) = 0.$$

Exemple 2.2

Polynôme	Racine(s) ?
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = (x-1)(x+3)(x+4)$	
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = x^2$	
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = 0$	
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_4(x) = x+1$	
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_5(x) = x^2+1$	
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_6(x) = (x-2)(x^3+x^2-41x-105)$	

Exemple 2.3 Déterminer les racines du polynôme P dont la courbe est donnée ci-dessous.



2.2 Racine d'un polynôme de degré un

Proposition 2.4 — **Racine et factorisation d'un polynôme de degré un.** Soit $P \in \mathbb{R}_1[x]$ un polynôme de degré un de la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = ax + b$$

où a, b sont des réels et $a \neq 0$. Alors le polynôme P admet exactement une racine réelle donnée par

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

Dans ce cas, le polynôme se factorise de la manière suivante,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

Démonstration. ■

Exemple 2.5

Polynôme	Racine(s) ?	Factorisation	
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = x - 5$			
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = 4x - 9$			
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = 2x$			
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_4(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$			

🔑 **Gestes Invisibles/Automatismes.** On n'apprend pas la formule, on la retrouve rapidement à chaque fois pour éviter les erreurs...

Exemple 2.6 Si l'on augmente de 2 cm le côté d'un carré, son aire augmente de 8 cm^2. Quelle est la mesure du côté du carré initial ?

2.3 Trinôme du second degré

Proposition 2.7 — **Racine·s et factorisation d'un polynôme de degré deux.** Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ un polynôme de degré deux de la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ (le discriminant).

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme P admet exactement deux racines réelles données par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  Dans ce cas, le polynôme P peut s'écrire sous la forme factorisée suivante

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$ alors le polynôme P admet exactement une racine réelle donnée par

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

  Dans ce cas, le polynôme P peut s'écrire sous la forme factorisée suivante

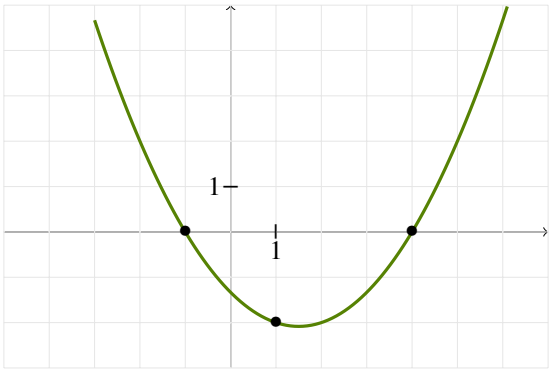
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$ alors le polynôme P n'admet pas de racines réelles et pas de factorisation.

Exemple 2.8

Polynôme	Racine(s)	Factorisation	
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - 5x + 6$			
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 1$			
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = -x^2 + 10x - 25$			

Exemple 2.9 On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'un polynôme P de degré 2. Donner son expression.



Proposition 2.10 — **Relations coefficients-racines.** Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ un polynôme de degré deux de la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. Supposons que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Alors P admet deux racines réelles que l'on note x_1 et x_2. Dans ce cas, on a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration.

■

Exemple 2.11 Résoudre le système suivant d'inconnues $(r,s) \in \mathbb{R}^2$

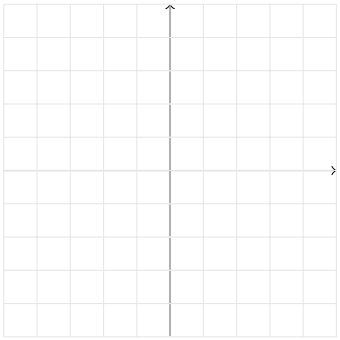
$$\begin{cases} r & + & s & = & -3 \\ r & \times & s & = & 2 \end{cases}$$

Exercice 2.12 — **Python .** Écrire un programme Python qui donne les racines d'un polynôme de degré deux dont le discriminant est strictement positif.

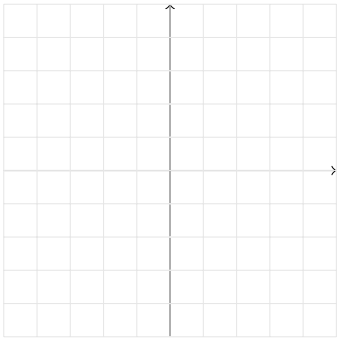
2.4 Nombre de racines d'un polynôme

Faisons une conjecture sur le nombre possible de racines d'un polynôme en regardant les polynômes de petits degrés.

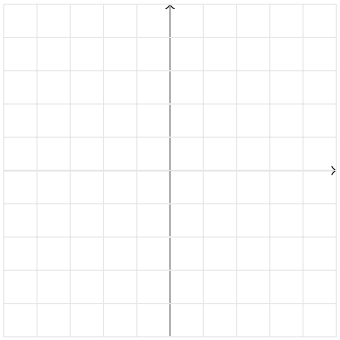
Polynôme de degré...	Nombre de racines possible	Exemple·s
$-\infty$		
0		
1		
2		



Exemples de polynômes de degré 2 qui n'admettent aucune racine.



Exemples de polynômes de degré 2 qui admettent chacun une unique racine.



Exemples de polynômes de degré 2 qui admettent chacun 2 racines distinctes.

Proposition 2.13 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré exactement n (avec $n \in \mathbb{N}$) Alors P possède au plus n racines.

Proposition 2.14 Un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ ayant au moins $n+1$ racines est forcément le polynôme nul.

Exercice 2.15 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant

$$\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!], \quad P(a_k) = Q(a_k).$$

Montrons que $P = Q$. *Pour cela, on peut introduire le polynôme* $R = P - Q$.

1. Déterminer le degré de R.
2. Déterminer les racines de R.
3. Conclure.

3 Factorisation d'un polynôme

Proposition 3.1 Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P, c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$. Alors, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)Q(x).$$

Exemple 3.2 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ défini par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 3x^3 + 10x^2 - 3x - 10$$

1. Combien de racines le polynôme P peut-il avoir ?
2. Vérifier que 1 est une racine évidente du polynôme P.
3. Trouver un polynôme Q tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)Q(x) \qquad (\star)$$

4. Factoriser le polynôme P.
5. En déduire toutes les racines de P.

Exemple 3.3 Trouver toutes les racines du polynôme $P \in \mathbb{R}_5[x]$ défini par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^5 - 2x^3 + x$$

4 Division euclidienne pour les polynômes

Pour tout couple d'entiers n et d, il existe un unique couple d'entiers q et r tels que

$$n = d \times q + r \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r < d.$$

Cela revient à trouver la quantité qu'il reste après le partage équitable le plus grand possible. Par exemple, si on veut partager équitablement 30 billes entre 7 enfants, chacun aura 4 billes et il en restera 2 :

$$30 = 7 \times 4 + 2.$$

Proposition 4.1 Pour tout couple de polynômes A et B de $\mathbb{R}[x]$, il existe un unique couple de polynômes Q et R de $\mathbb{R}[x]$ tels que

$$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Le polynôme Q s'appelle le **quotient** de la division euclidienne et le polynôme R le **reste** de la division euclidienne.

4.1 Première Méthode pour effectuer une division euclidienne : «à la main»

Illustrons la méthode directement sur un exemple. Considérons les deux polynômes A et B donnés par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 5 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 - 2.$$

Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, c'est-à-dire cherchons deux polynômes Q et R tels que

$$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

4.2 Deuxième Méthode pour effectuer une division euclidienne : «en posant la division»

Comme pour les entiers, on peut aussi «poser la division» pour trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de deux polynômes. Par exemple, considérons les deux polynômes A et B donnés par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 - x + 1$$

Déterminons le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B, c'est-à-dire cherchons deux polynômes Q et R tels que

$$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Exercice Type Concours 4.2 — **EDHEC 2003, Maths S.** On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, défini par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-1)^2(x-2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier de l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n, R_n) \in R[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = P(x) \times Q_n(x) + R_n(x)$$

2. On admet qu'il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$

Montrer que

$$a_n = 1, \qquad b_n = n, \qquad c_n = 2^n - n - 1$$