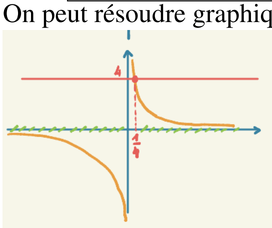
TD 02 – Fonctions usuelles (Correction)

Exercice 1 – 1. Si $x \in]-\infty, 0[$ alors l'inéquation $\frac{1}{x} < 4$ est toujours vraie.
Si $x \in]0, +\infty[$ alors

$$\frac{1}{x} < 4 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4} \quad (\cos x > 0 + 4 > 0)$$

Donc $\boxed{S =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{4}, +\infty[.}$
On peut résoudre graphiquement l'équation:



2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+1} - 1 &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2+1} \\
&= \frac{1-\left(x^2+1\right)}{x^2+1} \\
&= \frac{1-x^2-1}{x^2+1} \\
&= -\frac{x^2}{x^2+1} \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc, pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \frac{1}{x^2+1} \leq 1.}$

Exercice 2 – 1. a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{28} + \sqrt{63} &= \sqrt{2^2 \times 7} + \sqrt{3^2 \times 7} \\
&= \sqrt{2^2} \times \sqrt{7} + \sqrt{3^2} \times \sqrt{7} \\
&= 2 \times \sqrt{7} + 3 \times \sqrt{7} \\
&= 5\sqrt{7}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{6} + \sqrt{24} + \sqrt{54} &= \sqrt{6} + \sqrt{2^2 \times 6} + \sqrt{3^2 \times 6} \\
&= \sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} \\
&= 6\sqrt{6}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
9\sqrt{20} - 5\sqrt{45} - 2\sqrt{180} &= 9\sqrt{2^2 \times 5} - 5\sqrt{3^2 \times 5} - 2\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} \\
&= 9 \times 2 \times \sqrt{5} - 5 \times 3 \times \sqrt{5} - 2 \times 2 \times 3 \times \sqrt{5} \\
&= 18\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 12\sqrt{5} \\
&= -9\sqrt{5}
\end{aligned}$$

2. Posons $A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
En mettant les fractions au même dénominateur, on obtient,

$$\begin{aligned}A &= \frac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)} - \frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}\\ &= \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\ &= \frac{2}{(\sqrt{2})^2-1^2}\\ &= \frac{2}{2-1}\\ &= 2\end{aligned}$$

Donc A est Bien un nombre entier (egal à 2)

3. Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\\ &= \frac{2\times(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})\times(1-\sqrt{5})}\\ &= 2(1-\sqrt{5})\\ &= \frac{2(1-\sqrt{5})^2}{1-4}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi} &= \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}\\ &= -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned}\varphi^2-\varphi-1 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} - \frac{4}{4}\\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2(1+\sqrt{5})-4}{4}\\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4}\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi^2 = 1+\varphi.}$

Exercice 3 – 1.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}|x+3| = 3 &\iff x+3 = 3 \text{ ou } x+3 = -3\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -6\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est:

$\boxed{\{0,-6\}}$ b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}|x-3| \geqslant 4 &\iff x-3 \geqslant 4 \text{ ou } x-3 \leqslant -4\\ &\iff \quad x \geqslant 7 \text{ ou } x \leqslant -1\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est:

$\boxed{]-\infty,-1]\cup[7;+\infty[}$

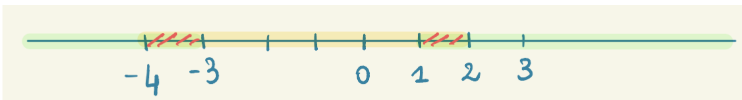
c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}|7-3x| \leqslant 5 &\Leftrightarrow -5 \leqslant 7-3x \leqslant 5\\ &\Leftrightarrow -12 \leqslant -3x \leqslant -2\\ &\Leftrightarrow \quad 12 \geqslant 3x \geqslant 2\\ &\Leftrightarrow \quad 4=\frac{12}{3} \geqslant x \geqslant \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est: $\boxed{\left[\frac{2}{3},4\right]}$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned}2 \leqslant |x+1| \leqslant 3 &\Leftrightarrow |x+1| \geqslant 2 \text{ et } |x+1| \leqslant 3\\ &\Leftrightarrow (x+1 \geqslant 2 \text{ ou } x+1 \leqslant -2) \text{ et } (-3 \leqslant x+1 \leqslant 3)\\ &\Leftrightarrow (x \geqslant 1 \text{ ou } x \leqslant -3) \text{ et } (-4 \leqslant x \leqslant 2)\end{aligned}$$



Donc l'ensemble des solutions est: $\boxed{[-4,-3] \cup [1,2]}$

2. Par définition de la valeur absolue,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|x^2-5x+6\right| = \begin{cases} x^2-5x+6 & \text{si } x^2-5x+6 \geqslant 0\\ -\left(x^2-5x+6\right) & \text{si } x^2-5x+6 < 0\end{cases}$$

Il s'agit donc de déterminer le signe du polynôme $x \mapsto x^2-5x+6$.

Au brouillon $x^2-5x+6=0$

$\Delta = (-5)^2 - 4\times 6 = 25-24 = 1$ donc deux racines : $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{1}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{1}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

On trace le tableau de signe de $x \mapsto x^2-5x+6$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2-5x+6 \text{ si } x \in]-\infty,2] \cup [3;+\infty[\\ -x^2+5x-6 \text{ si } x \in [2,3]\end{cases}$$

3. Soient $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Tout d'abord, $\left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x^n|}{|n|} = \frac{|x|^n}{n}$

- D'une part, $0 \leqslant |x| \leqslant 1$. or la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante su $[0,+\infty[$. donc $|x|^n \leq 1^n$

  c'est-à-dire

  $$0 \leqslant |x|^n \leqslant 1 \quad (*)$$

- D'autre part, $n \geqslant 1 \geqslant 0$
  Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante su $]0;+\infty[$. donc

  $$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1. \quad (**)$$

- Conclusion. En multipliant, les deux inégalités $(*)$ et $(**)$ (qui n'impliquent que des nombres positifs), on a:

  $$\begin{aligned} & |x|^n \times \tfrac{1}{n} \leqslant 1 \times 1\\ ie \quad & \left|\tfrac{x^n}{n}\right| \leqslant 1\end{aligned}$$

Exercice 4 – **1.** Soit $x \in \mathbb{Z}$. Comme x est un entier, on a $\lfloor x \rfloor = x$. Sonc $f(x) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0$.

2. On a

$$\begin{aligned} f(2.5) &= 2.5 - \lfloor 2.5 \rfloor \\ &= 2.5 - 2 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{4}{3} - \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \\ &= \frac{4}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Soit $x \in [0,1[$. Comme

$$0 \leqslant x < 1,$$

on a $\lfloor x \rfloor = 0$ Donc pour bout $x \in [0,1[, f(x) = x$.

4.

- Commençons par montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, on a

  $$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

  Donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + 1 < \lfloor x \rfloor + 2$. Ainsi le nombre $k = \lfloor x \rfloor + 1$ est un entier vérifiant

  $$k \leqslant x + 1 < k + 1$$

  Par définition de la partie entière,

  $$\lfloor x+1 \rfloor = k = \lfloor x \rfloor + 1.$$

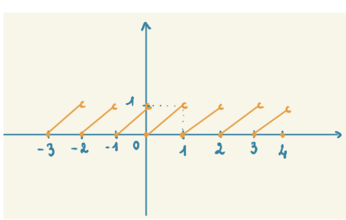
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

  $$\begin{aligned} f(x+1) &= x + 1 - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= x - \lfloor x \rfloor \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

  $$f(x+1) = f(x)$$

5.



Exercice 5 –

- Soit $x > 0$. On a :

  $$\ln(x) = -7 \Longleftrightarrow x = e^{-7}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

  $$\exp(x) = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln 4$$

- Soit $x \in]\frac{1}{3}; +\infty[$. On a :
$$\begin{aligned} \ln(3x-1) \geqslant \ln(2) &\iff 3x-1 \geqslant 2 \\ &\iff 3x \geqslant 3 \\ &\iff x \geqslant 1 \end{aligned}$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:
$$\begin{aligned} e^{-3x+5} < 2 &\iff -3x+5 < \ln 2 \\ &\iff -3x < \ln 2 - 5 \\ &\iff x > -\frac{1}{3}(\ln 2 - 5) \\ &\iff x > -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{5}{3} \end{aligned}$$
- Soit $x \in]\frac{1}{4}; +\infty[$. On a :
$$\begin{aligned} \ln(4x-1) \leqslant 3 &\iff 4x-1 \leqslant e^3 \\ &\iff 4x \leqslant e^3 + 1 \\ &\iff x \leqslant \frac{1}{4}\left(e^3+1\right) \end{aligned}$$

Exercice 6 – 1.a)
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{4}\right) &= -\ln(4) \\ &= -\ln\left(2^2\right) \\ &= -2\ln(2) \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} \ln(8) + 5\ln(2) &= \ln\left(2^3\right) + 5\ln(2) \\ &= 3\ln(2) + 5\ln(2) \\ &= 8\ln(2) \end{aligned}$$
c)
$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{32}) &= \frac{1}{2}\ln(32) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(2^5\right) \\ &= \frac{5}{2}\ln(2) \end{aligned}$$
d)
$$\begin{aligned} \ln(10) - \ln(20) &= \ln(10) - \ln(2 \times 10) \\ &= \ln(10) - (\ln 2 + \ln 10) \\ &= \ln(10) - \ln 2 - \ln 10 \\ &= -\ln(2) \end{aligned}$$
2. a)
$$\begin{aligned} e^5 \times e^2 \times e^{-3} &= e^{5+2-3} \\ &= e^4 \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} e^3 \times \left(e^{-4}\right)^2 &= e^3 \times e^{-} \\ &= e^3 \times e^{-} \\ &= e^{3-8} \\ &= e^{-5} \end{aligned}$$
c)

$$\frac{e^4\times e^{-5}}{e} = \frac{e^4\times e^{-5}}{e^1} = e^{4-5-1} = e^{-2}$$

d)

$$\frac{e\times\left(e^5\right)^7}{e^{-9}\times e^4} = e^{1+5\times 7-(-9+4)} = e^{41}$$

3. a)

$$e^{2\ln(3)+\ln 4} = e^{2\ln(3)}\times e^{\ln(4)} = e^{\ln\left(3^2\right)}\times e^{\ln(4)} = 3^2\times 4 = 36$$

b)

$$e^{3\ln 2-\ln 4} = e^{3\ln(2)}\times e^{-\ln 4} = e^{\ln\left(2^3\right)}\times e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = 2^3\times\frac{1}{4} = 2$$

c)

$$\frac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}} = \frac{e^{\ln 6}\times e}{e^{\ln 9}\times e^2} = \frac{6}{9}e^{-1}$$

d)

$$e^{3\ln 3}+e^{2\ln 7} = e^{\ln\left(3^3\right)}+e^{\ln\left(7^2\right)} = 3^3+7^2 = 27+14 = 41$$

e)

$$e^{5\ln 3}\times e^{4\ln(9)} = 3^5\times 9^4$$

f)

$$\ln\left(1+e^5\right)+\ln\left(\frac{1}{1+e^{-5}}\right) = \ln\left(e^5\left(1+e^{-5}\right)\right)-\ln\left(1+e^{-5}\right) = \ln\left(e^5\right)+\ln\left(1+e^5\right)-\ln\left(1+e^5\right) = 5$$

4. a)

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2-2x}$$

b)

Soit $x\in\mathbb{R}$ On a :

$$\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}} = e^{x^2+2x-(x+1)^2} = e^{x^2+2-\left(x^2+2x+1\right)} = e^{-1}$$

c)

Soit $x>0$ on a :

$$e^{2\ln(x)} = e^{\ln\left(x^2\right)}$$
$$= x^2$$

d)
Soit $x > 0.0na$:

$$-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(x^2\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{2x} \times \frac{1}{x} \times x^2\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\ln 2$$

e)
Soit $x \in \mathbb{R}$. on a :

$$\sqrt{e^{2x}} \times e^{-x} = \left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{-x}$$
$$= e^{2x \times \frac{1}{2}} \times e^{-x}$$
$$= e^x \times e^{-x}$$
$$= e^{x-x}$$
$$= e^0$$
$$= 1$$

5.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$A = \left(e^{2x} + 5\right)^2$$
$$= \left(e^{2x}\right)^2 + 2e^{2x} \times 5 + 5^2$$
$$= e^{4x} + 10e^{2x} + 25$$
$$B = \left(e^{2x} - 2\right)\left(e^{-x} + 5\right)$$
$$= e^{2x} \times e^{-x} + 5e^{2x} - 2e^{-x} - 2 \times 5$$
$$= e^x + 5e^{2x} - 2e^{-x} - 10$$
$$C = 5e^{-4x} - 3e^{-4x} + 7e^{-4x}$$
$$= (5 - 3 + 7)e^{-4x}$$
$$= 9e^{-4x}$$
$$D = e^{2x} - 9x^2$$
$$= \left(e^x\right)^2 - (3x)^2$$
$$= \left(e^x - 3x\right)\left(e^x + 3x\right)$$

Exercice 7 – 1.

$$A = 2^3 \times (4 \times 3)^2$$
$$= 2^3 \times 4^2 \times 3^2$$
$$= 8 \times 16 \times 9$$
$$= 1152$$
$$B = \frac{7^7}{7^4} = 7^{7-4}$$
$$= 7^3$$
$$= 343$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\left(2^2\right)^3 \times 10 \times 4^{-2}}{15 \times 8} \\
&= \frac{2^6 \times 2 \times 8 \times \left(2^2\right)^{-2}}{3 \times 8 \times 2^3} \\
&= 2^{6+1-3-2\times 2} \times 3^{-1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2. Déjà tous les membres de l'égalité ont un sens pour $a \neq 0$ et $n \neq 0$ car $n \neq 0, a \neq 0$ et $na^n \neq 0$. Soient n entier naturel non nul et a un réel non nul.

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a} - 1\right)^n &= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{a}\right)^n \\
&= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1-a}{a}\right)^n \\
&= \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{(1-a)^n}{a^n} \\
&= \frac{(-1 \times (1-a))^n}{na^n} \\
&= \frac{(a-1)^n}{na^n}
\end{aligned}$$

3.

Soit n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= (-3)^n + 2 \times 3^{n+1} - 4 \times 3^n \\
&= 3^n \times (-1)^n + 3^n \times 2 \times 3 - 3^n \times 4 \\
&= 3^n \times \left((-1)^n + 6 - 4\right) \\
&= 3^n \times \left((-1)^n + 2\right)
\end{aligned}$$

Donc

- si n est impair,
$$\begin{aligned} u_n &= 3^n \times (-1+2) \\ &= 3^n \times 1 \\ &= 3^n \end{aligned}$$
- et si n est pair,
$$\begin{aligned} u_n &= 3^n \times (1+2) \\ &= 3^n \times 3 \\ &= 3^{n+1} \end{aligned}$$