TD 3 – Calcul de dérivées (Correction)

Savoir calculer une dérivée

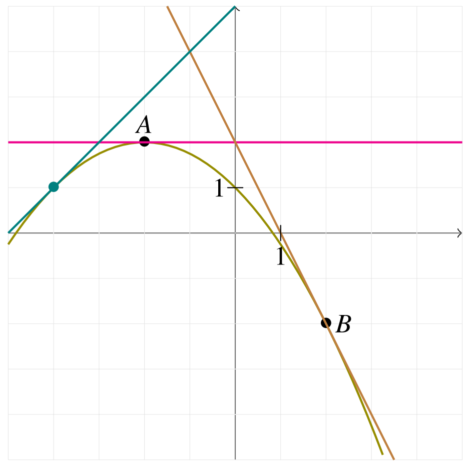
Exercice 1 – Calculs de dérivées.

Ensemble de déf.	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\mathbb{R}$	$f(x) = 13x^2 + 3x - 49$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 26x + 3$
$\mathbb{R}^*$	$g(x) = \frac{1}{3x}$	$\mathbb{R}^*$	$g'(x) = -\frac{1}{3x^2}$
$\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$	$h(x) = \frac{3}{4x+2}$	$\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$	$h'(x) = -\frac{3}{(2x+1)^2}$
$[-1, +\infty[$	$i(x) = \sqrt{x+1}$	$]-1, +\infty[$	$i'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = (-x+6)(3x-2)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 20 - 6x$
$\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{7}\}$	$f(x) = \frac{4x+8}{21x-3}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{7}\}$	$f'(x) = -\frac{20}{(7x-1)^2}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \exp(x^2)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x\exp(x^2)$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
$\mathbb{R}$	$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x} - x$	$\mathbb{R}$	$g'(x) = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} - 1$
$\left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$	$h(x) = \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right)$	$\left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$	$h'(x) = \frac{2x^2+3}{2x^3-3x}$
$\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$	$i(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$	$i'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}$
$]-1, +\infty[$	$f(x) = 1 + \ln(1+x)$	$]-1, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

Exercice 2 – Sur la notion de tangente. On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-5,5]$ par

$$\text{pour tout } x \in [-5,5], \qquad f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 2$$

Les tangentes à la courbe en A et B ont été tracées.



1. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(2)$.

   Graphiquement, $f'(-2)$ correspond au coefficient directement de la tangente au point A. Comme la tangente au point A est horizontale, son coefficient directeur est de 0 donc $f'(-2) = 0$. De même, on trouve que $f'(2) = -2$ («quand on avance de un, on descend de deux»).

2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse -4. La représenter graphiquement.

   L'équation de la tangente au point d'abscisse -4 est donnée par

   $$y = f'(-4)(x+4) + f(-4).$$

   Or, en utilisant l'expression explicite de la fonction f, on obtient $f(-4) = 1$. De plus, la fonction f est dérivable sur $[-5,5]$ et sa dérivée est donnée par

   $$\text{pour tout } x \in [-5,5], \qquad f'(x) = -\frac{1}{4} \times 2(x+2) = -\frac{1}{2}(x+2)$$

   En particulier, on obtient que, $f'(-4) = 1$. Donc, l'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est donnée par

   $$y = 1 \times (x+4) + 1 = x+5$$

Exercice 3 – Sur la notion de tangente. On considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$$

1. Montrer que, pour tout réel a, les tangentes aux points d'abscisses respectives a et $-a$ sont parallèles.

   Tout d'abord, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par,

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

   Soit $a \in \mathbb{R}$. Les tangentes aux points d'abscisses respectives a et $-a$ sont les droites d'équations respectives,

   $$y = f'(a)(x-a) + f(a) \qquad \text{et} \qquad y = f'(-a)(x+a) + f(-a)$$

   Donc ces deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont les mêmes coefficients directeurs, et donc si et seulement si $f'(a) = f'(-a)$. Or

   $$f'(-a) = \frac{5(1-(-a)^2)}{(1+(-a)^2)^2} = \frac{5(1-a^2)}{(1+a^2)^2} = f'(a)$$

   Donc les tangentes aux points d'abscisses respectives a et $-a$ sont parallèles.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes horizontales ?

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales si et seulement si la dérivée s'annule. Or,

   $$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 5(1-x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -1$$

   Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisse 1 et -1.