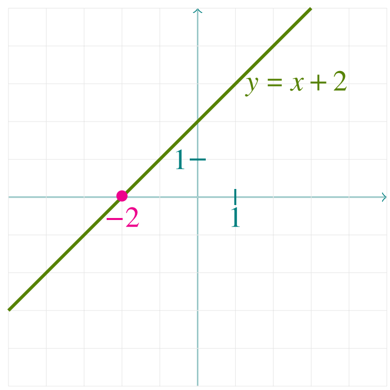
DS 0 (Correction)

Vendredi 6 septembre, 13h30 - 14h30

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x+2=0$ de manière graphique.

Résoudre l'équation $x+2=0$ revient graphiquement à trouver l'abscisse du point d'intersection entre la droite d'équation $y=x+2$ et l'axe des abscisses.



Graphiquement, on trouve que l'équation $x+2=0$ admet une $\boxed{\text{unique solution}}$ donnée par $\boxed{-2.}$ **Vérification.** $-2+2=0$ ✓

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $12x+4=0$ (de manière calculatoire).

Raisonnons par *équivalence* pour résoudre l'équation $12x+4=0$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 12x+4=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 12x=-4 \\ &\Longleftrightarrow \quad x=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc l'équation $12x+4=0$ admet une $\boxed{\text{unique solution}}$ donnée par $\boxed{-\frac{1}{3}.}$

Vérification. $12\times\left(-\frac{1}{3}\right)+4=-4+4=9$ ✓

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-2x-4=0$.

L'équation $2x^2-2x-4=0$ est une équation de second degré. Pour la résoudre, on commence par calculer son discriminant qui est donné par

$$\Delta=(-2)^2-4\times2\times(-4)=4+32=36$$

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles données par

$$x_1=\frac{2+\sqrt{36}}{2\times2}=\frac{2+6}{4}=2 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{2-\sqrt{36}}{2\times2}=\frac{2-6}{4}=-1$$

Donc, finalement, l'équation $2x^2-2x-4=0$ admet $\boxed{\text{deux solutions}}$ réelles données par $\boxed{2 \text{ et } -1.}$

Vérification.

$$2\times2^2-2\times2-4=0 \quad ✓$$
$$2\times(-1)^2-2\times(-1)-4=0 \quad ✓$$

$\boxed{4.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = (4x+3)(7x-2) - 2x$

b) $B = (x-1)^2 - (2x+3)^2$

c) $C = (x-2)(x+1)(x-3)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{A} &= (4x+3)(7x-2) - 2x \\ &= 28x^2 - 8x + 21x - 6 - 2x \\ &\boxed{= 28x^2 + 11x - 6}\end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned}\boxed{B} &= (x-1)^2 - (2x+3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 - (4x^2 + 12x + 9) \\ &\boxed{= -3x^2 - 14x - 8}\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}\boxed{C} &= (x-2)(x+1)(x-3) \\ &= (x^2 - x - 2)(x-3) \\ &\boxed{= x^3 - 4x^2 + x + 6}\end{aligned}$$

$\boxed{5.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes par la quantité indiquée.

a) $A = x^2 + 6x + 9$ par $x+3$

b) $B = 2x - 5 + (2x-5)^2$ par $2x-5$

c) $C = x^2 - 9 + (x-3)(x+1)$ par $x-3$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{A} &= x^2 + 6x + 9 \\ &\boxed{= (x+3)^2}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\boxed{B} &= 2x - 5 + (2x-5)^2 \\ &= (2x-5)(1 + 2x - 5) \\ &\boxed{= (2x-5)(2x-4)}\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}\boxed{C} &= x^2 - 9 + (x-3)(x+1) \\ &= (x-3)(x+3) + (x-3)(x+1) \\ &\boxed{= (x-3)(2x+4)}\end{aligned}$$

$\boxed{6.}$ Calculer les fractions suivantes.

a) $A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{5}$ b) $B = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{2}{7}}$

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{A} &= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{10}\\ &= \frac{10}{30} + \frac{9}{30}\\ &\boxed{= \frac{19}{30}}\end{aligned}$$

Et aussi,

$$\begin{aligned}\boxed{B} &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{2}{7}}\\ &= \frac{\frac{3}{6} + \frac{8}{6}}{\frac{21}{35} - \frac{10}{35}}\\ &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{11}{35}}\\ &= \frac{\cancel{11}}{6} \times \frac{35}{\cancel{11}}\\ &\boxed{= \frac{35}{6}}\end{aligned}$$

$\boxed{7.}$ Donner l'expression la plus simple des expressions suivantes (sous forme d'une seule fraction) en précisant pour chacune les valeurs de x autorisées.

a) $A = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3x+1}$ b) $B = \dfrac{2x+5}{3x-1} - \dfrac{3x-2}{5x-3}$

a) La quantité A est définie pour des $x \in \mathbb{R}$ tels que $3x + 1 \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}\}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{A} &= \frac{3}{5} + \frac{2}{3x+1}\\ &= \frac{3 \times (3x+1) + 2 \times 5}{5(3x+1)}\\ &\boxed{= \frac{9x+13}{15x+5}}\end{aligned}$$

b) La quantité B est définie pour des $x \in \mathbb{R}$ tels que $3x-1 \neq 0$ et $5x-3 \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{B} &= \frac{2x+5}{3x-1} - \frac{3x-2}{5x-3} \\ &= \frac{(2x+5)(5x-3)-(3x-2)(3x-1)}{(3x-1)(5x-3)} \\ &\boxed{= \frac{x^2+28x-17}{15x^2-14x+3}}\end{aligned}$$

8. À l'aide de la question 2, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2X^4 - 2X^2 - 4 = 0$.

Raisonnons par *analyse-synthèse*.

- **Analyse.** Soit $X \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation $2X^4 - 2X^2 - 4 = 0$. Posons $x = X^2$. Alors $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $2x^2 - 2x - 4 = 0$. Or d'après la question 2, cette équation admet exactement deux solutions données par 2 et -1. Donc

$$\text{soit } x = 2 \qquad \text{soit} \qquad x = -1$$

En revenant à la variable initiale, on obtient

$$\text{soit } X^2 = 2 \qquad \text{soit} \qquad X^2 = -1$$

L'équation $X^2 = 2$ admet deux solutions données par $X = \sqrt{2}$ et $X = -\sqrt{2}$. L'équation $X^2 = -1$ quant à elle n'admet aucune solution. Donc finalement, on obtient,

$$\text{soit } X = \sqrt{2} \qquad \text{soit} \qquad X = -\sqrt{2}$$

- **Synthèse.** Vérifions que $X = \sqrt{2}$ et $X = -\sqrt{2}$ sont bien des solutions de l'équation $2X^4 - 2X^2 - 4 = 0$. On a,

$$2 \times (\sqrt{2})^4 - 2 \times (\sqrt{2})^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$
$$2 \times (-\sqrt{2})^4 - 2 \times (-\sqrt{2})^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

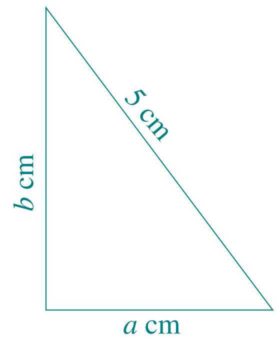
Donc $X = \sqrt{2}$ et $X = -\sqrt{2}$ sont bien des solutions de l'équation $2X^4 - 2X^2 - 4 = 0$.

- **Conclusion.** L'équation $2X^4 - 2X^2 - 4 = 0$ admet exactement $\boxed{\text{deux solutions}}$ données par $\boxed{\sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2}.}$

Vérification. La vérification a été effectuée dans la synthèse.

9. On considère un triangle rectangle de périmètre 12 cm et dont l'hypoténuse mesure 5 cm. Déterminer la longueur de tous ses côtés.

D'après l'énoncé, l'hypoténuse du triangle rectangle vaut 5 cm. Notons a et b la longueur (en cm) des deux autres côtés du triangle, comme présenté sur le schéma ci-dessous.



D'après l'énoncé, le périmètre de ce triangle vaut 12 cm. Avec nos notations et en omettant les unités de longueur, cela vaut dire que les inconnues a et b doivent vérifier

$$a+b+5=12 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad a+b=7 \qquad\qquad (E_1)$$

De plus, d'après le théorème de Pythagore, on doit aussi avoir

$$a^2+b^2=5^2=25 \qquad\qquad (E_2)$$

En utilisant (E_1), on obtient $b=7-a$. En substituant cela dans (E_2) puis en développant, on obtient alors

$$a^2+(7-a)^2=25 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 2a^2-14a+24=0$$

On se retrouve avec une équation du second degré dont le discriminant est donné par $\Delta=4>0$. Donc cette équation admet deux solutions réelles, données par (après calculs) 3 et 4. On obtient finalement deux possibilités.

- Soit $a=3$ et alors, d'après (E_1), $b=4$.
- Soit $a=4$ et alors, d'après (E_1), $b=3$.

Dans tous les cas, l'hypoténuse du triangle mesure 5 cm, et le triangle possède un autre côté de $\boxed{4 \text{ cm}}$ et un autre de $\boxed{3 \text{ cm.}}$