3 Calculs de dérivées

Le but de ce chapitre est de se re-familiariser avec le **calcul** de **dérivées**, sans rentrer dans les détails de la théorie. La rédaction des exemples peut donc manquer de rigueur qui sera rajoutée par la suite.

1 Dérivées usuelles

Ensemble de définition	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\mathbb{R}$	$x \mapsto k, \quad k$ constante	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^n, \ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}, \ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$[0, +\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Exemple 1.1 Remplir le tableau suivant.

Ensemble de définition	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -6$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto x^{-5}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{5}{x^6}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^4}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

2 Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un intervalle I.

Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Multiplication par un réel	pour $k \in \mathbb{R}$ (constante), $(k \times u)' = k \times u'$
Produit	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Inverse (si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$)	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Quotient (si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Exemple 2.1 Remplir le tableau suivant.

Ensemble de définition	**Fonction**	**Ensemble de der.**	**Dérivée**
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + x - 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 12x^2 - 10x + 1$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto (x^2+1)(x^3-2x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 5x^4 - 3x^2 - 2$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \mapsto \frac{3}{(x+1)^2}$
$[0, +\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x} \times (5x-3)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{15x-3}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^2+3x}{2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto x + \frac{3}{2}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \left(2x^5 - \frac{3}{2}x^2\right)\left(\frac{5}{6}x^2 - 5\right)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{35}{3}x^6 - 50x^4 - 5x^3 + 15x$
$\mathbb{R}\backslash\{\frac{8}{3}\}$	$x \mapsto \frac{5x^2-2x+6}{8-3x}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{8}{3}\}$	$x \mapsto \frac{-15x^2+80x+2}{(8-3x)^2}$

3 Dérivée d'une composée

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un intervalle I.

Composée	$(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$
Composée avec ln	$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
Composée avec exp	$(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$
Composée avec une puissance	$(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$
Composée avec la racine carrée	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple 3.1 Remplir le tableau suivant.

Ensemble de définition	**Fonction**	**Ensemble de der.**	**Dérivée**
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sqrt{x^4+1}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto (6x^2+3x)^3$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 9(4x+1)(6x^2+3x)^2$
$\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{5x-3}}$	$\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$	$x \mapsto -\frac{5}{2(5x-3)^{\frac{3}{2}}}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2} \times \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
$\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$	$x \mapsto \ln(2x+1)$	$\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$	$x \mapsto \frac{2}{2x+1}$
$\mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}$	$x \mapsto (-6x+9)^{-3}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}$	$x \mapsto 18(-6x+9)^{-4}$

Exemple 3.2 Soient u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = u(ax+b).$$

Calculer la dérivée de la fonction f.

Gestes Invisibles/Automatismes. Il s'agit ici de décomposer f comme la composée de deux fonctions de la manière suivante,

$$x \xrightarrow{v} ax+b \xrightarrow{u} f(x)$$

Soit v la fonction définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = ax+b$. Alors, on remarque que $f = u \circ v$. Comme u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, par composition la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = au'(ax+b).$$

4 Tangente

Proposition 4.1 Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la **tangente** de la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

La dérivée en un point a correspond donc au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a, c'est-à-dire que la dérivée en un point correspond localement à la «pente» de la courbe autour de ce point là.

Exemple 4.2 Relier chaque définition de tangente à son équation réduite.

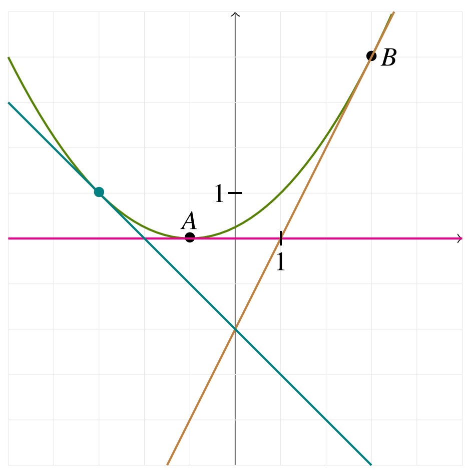
$f(1) = 5, \ f'(1) = 0$	□	□	$y = 5$
$g'(2) = -1, \ g(2) = 3$	□	□	$y = 2x - 6$
$h'(-5) = 1/2, \ h(-5) = -3/2$	□	□	$y = -x + 5$
$k(3) = 0, \ k'(3) = 2$	□	□	$y = \frac{1}{2}x + 1$

Exemple 4.3 On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-5,5]$ par

$$\text{pour tout } x \in [-5,5], \qquad f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2.$$

Les tangentes à la courbe en A et B ont été tracées.

1. Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(3)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse -3. La représenter graphiquement.



1. Graphiquement, $f'(1)$ correspond au coefficient directement de la tangente au point A. Comme la tangente au point A est horizontale, son coefficient directeur est de 0 donc $f'(1) = 0$. De même, on trouve que $f'(3) = 2$ («quand on avance de un, on monte de deux»).
2. L'équation de la tangente au point d'abscisse -3 est donnée par

$$y = f'(-3)(x+3) + f(-3).$$

Or, en utilisant l'expression explicite de la fonction f, on obtient $f(-3) = 1$. De plus, la fonction f est dérivable sur $[-5,5]$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x \in [-5,5], \qquad f'(x) = \frac{1}{4} \times 2(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)$$

En particulier, on obtient que, $f'(-3) = -1$. Donc, l'équation de la tangente au point d'abscisse -3 est donnée par

$$y = -(x+3) + 1 = -x - 2$$