4 Résolution d’un Système Linéaire

1 La notion de système linéaire

Définition 1.1 — Système Linéaire. On appelle *système linéaire* de n équations à p inconnues un système (S) de la forme

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où

- et les réels $x_1,\dots,x_p$ sont les p *inconnues* du système,
- les réels $a_{1,1},a_{1,2},\dots,a_{n,n}$ sont les *coefficients* du système,
- et le vecteur de réels $(b_1,\dots,b_n)$ forme le *second membre* du système.

Une *solution* du système est un p-uplet $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$ qui vérifie le système (S) ci-dessus.
Un système linéaire est dit *homogène* si son second membre est nul.

! Face à un système linéaire, on commence par identifier les *inconnues*, c'est-à-dire les nombres dont on ne connait pas la valeur, puis les *coefficients* du système qui apparaissent devant les inconnues et enfin le *second membre*, c'est-à-dire les termes ne faisant pas intervenir d'inconnues.

Application Directe du Cours 1.2 Montrer que le *triplet* $(-1,0,2)$ est une solution du système suivant,

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On est face à un **système linéaire**.

- Nbre d'équations : 3
- Nature de l'inconnue : un triplet (x,y,z)
- Non homogène

On calcule directement que

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -1 & + & 0 & + & 2\times 2 & = & 3 \\ -1 & + & 2\times 0 & + & 2 & = & 1 \\ 2\times(-1) & + & 0 & + & 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc le *triplet* $(-1,0,2)$ est une solution du système linéaire (S).

Application Directe du Cours 1.3 Montrer que les deux *quadruplets* $(2,-2,-1,1)$ et $(4,-4,-2,2)$ sont des solutions du système suivant et donner une autre solution (évidente) à ce système.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On est face à un **système linéaire**.

- Nbre d'équations : 3
- Nature de l'inconnue : un quadruplet (x,y,z,t)
- Homogène

On calcule directement que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2 & - & 2 & - & 1 & + & 1 & = & 0 \\ & - & 2 & - & (-1) & + & 1 & = & 0 \\ & & & - & 1 & + & 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc le *quadruplet* $(2,-2,-1,1)$ est une solution du système linéaire (S). De même,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 4 & - & 4 & - & 2 & + & 2 & = & 0 \\ & - & 4 & - & (-2) & + & 2 & = & 0 \\ & & & - & 2 & + & 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc le *quadruplet* $(4,-4,-2,2)$ est une autre solution du système linéaire (S). Enfin, on remarque directement que le quadruplet $(0,0,0,0)$ est une autre solution du système linéaire (S) (cela vient du *caractère homogène* du système). Attention, un système linéaire n'admet *pas forcément une unique solution* comme l'illustre cet exemple.

2 Résolution d'un système linéaire

Définition 2.1 Deux systèmes (S) et (T) sont dits équivalents s'ils ont les mêmes solutions. On note alors $(S) \iff (T)$.

Application Directe du Cours 2.2 Résoudre le système suivant,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

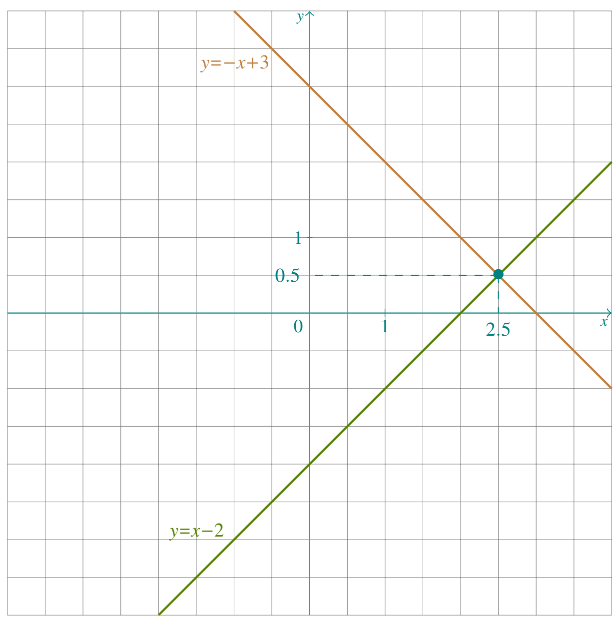
Gestes Invisibles/Automatismes. On est face à un système **linéaire**.

- Nbre d'équations : 2
- Nature de l'inconnue : un couple (x, y)
- Non Homogène

▶ **Approche graphique** : On peut commencer par remarquer que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} y & = & -x & + & 3 \\ y & = & x & - & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi, résoudre ce système linéaire de deux équations à deux inconnues revient à chercher l'intersection dans le plan des deux droites d'équation $y = -x+3$ et $y = x-2$. Cette question peut être résolue graphiquement.



▶ **Approche analytique** : On peut aussi résoudre ce système par substitution (on verra plus tard une méthode plus efficace, en pratique, on évitera d'utiliser la méthode de substitution pour résoudre un système). En exprimant x en fonction de y puis en injectant cette expression dans une des deux lignes, on obtient,

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=3-y \\ x-y=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=3-y \\ 3-y-y=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=3-y \\ 2y=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ce système admet donc une <u>unique</u> solution, donnée par le couple

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Vérification. Le couple $(5/2, 1/2)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3 & \checkmark \\ \frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2 & \checkmark \end{array}\right.$$

2.1 Résolution d'un système linéaire homogène

Proposition 2.3 Tout système linéaire *homogène* de n équations à p inconnues admet au moins une solution, donnée par le p-uplet $(0,\dots,0)$.

Démonstration. Considérons le système linéaire homogène suivant

$$(SH)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & +a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & +a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

Alors, le p-uplet $(0,\dots,0)$ est bien une solution de ce système linéaire car

$$(SH)\quad \left\{\begin{array}{cccccc} a_{1,1}\times 0 & + & \dots & +a_{1,p}\times 0 & = & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\times 0 & + & \dots & +a_{n,p}\times 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

■

Un système linéaire *homogène* n'a pas forcément que le p-uplet $(0,\dots,0)$ comme solution. Par exemple, si on considère le système linéaire *homogène* suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ 4x & + & 4y & = & 0 \end{array}\right.$$

Alors $(0,0)$ est bien sur solution mais aussi $(-1,1)$, $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$,...

Proposition 2.4 — Stabilité par combinaison linéaire. Soit (SH) un système linéaire *homogène*. Si $(x_1,\dots,x_p)$ et $(y_1,\dots,y_p)$ sont deux solutions du système (SH) et si λ et μ sont des réels, alors $(\lambda x_1+\mu y_1,\dots,\lambda x_p+\mu y_p)$ est aussi solution du système (SH).

Démonstration. Démontrons le résultat pour un système linéaire homogène de deux équations à deux inconnues de la forme suivante,

$$(SH)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array}\right.$$

Soient (x_1,y_1) et (x_2,y_2) deux solutions de ce système linéaire, c'est-à-dire vérifiant respectivement

$$\left\{\begin{array}{cccccc} ax_1 & + & by_1 & = & 0 & (L_1) \\ cx_1 & + & dy_1 & = & 0 & (L_2) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{cccccc} ax_2 & + & by_2 & = & 0 & (L_1') \\ cx_2 & + & dy_2 & = & 0 & (L_2') \end{array}\right.$$

et soient λ et μ deux nombres réels. Montrons que le couple $(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2)$ est aussi une solution du système linéaire (SH). D'abord, concernant la première équation, on a,

$$a(\lambda x_1+\mu x_2)+b(\lambda y_1+\mu y_2) = \lambda(ax_1+by_1)+\mu(ax_2+by_2) = \lambda\times 0+\mu\times 0 = 0,$$

en utilisant les équations L_1 et L_1'. De même, en utilisant les équations L_2 et L_2', on obtient

$$c(\lambda x_1+\mu x_2)+d(\lambda y_1+\mu y_2) = \lambda(cx_1+dy_1)+\mu(cx_2+dy_2) = \lambda\times 0+\mu\times 0 = 0.$$

Donc, finalement, le couple $(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2)$ satisfait le sytème suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a(\lambda x_1+\mu x_2) & + & b(\lambda y_1+\mu y_2) & = & 0 \\ c(\lambda x_1+\mu x_2) & + & d(\lambda y_1+\mu y_2) & = & 0 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que le couple $(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2)$ est une solution du système linéaire (SH). ■

2.2 Résolution d'un système linéaire avec second membre

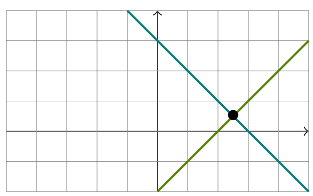
Proposition 2.5 Soit (S) un système linéaire.

1. Si Nbre d'équations ≠ Nbre d'Inconnues, alors le système (S) admet
   - soit *aucune* solution,
   - soit une *infinité* de solutions.
2. Si Nbre d'équations = Nbre d'Inconnues, alors le système (S) admet
   - soit *aucune* solution,
   - soit une *unique* solution,
   - soit une *infinité* de solutions.

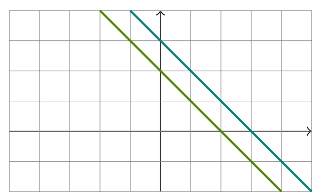
   Lorsqu'un système linéaire carré admet une unique solution, on dit que c'est un *système de Cramer*.

? Rappelons que résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à chercher l'intersection de deux droites dans le plan. Or deux droites dans le plan peuvent

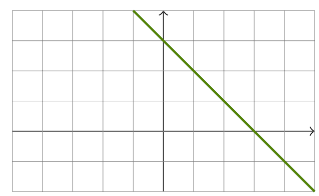
- soit ne jamais se couper (droites parallèles non confondues), donc il n'a *aucune* solution,
- soit se couper en un unique point (droites sécantes), donc il n'y a qu'*une seule* solution
- soit se confondre (droites superposées), donc il y a une *infinité* de solution.



Les deux droites se coupent en un *unique* point (*unique* solution)



Les deux droites ne s'intersectent *jamais* (*aucune* solution).



Les deux droites sont *confondues* (*infinité* de solutions).

3 Résolution par algorithme du pivot de Gauss

Dans l'Exemple 2.2, nous avons résolu le système linéaire de deux équations à deux inconnues grâce à la méthode de substitution. Cette méthode est pratique pour les petits systèmes mais devient compliquée à mettre en place sur les systèmes plus grands (par exemple de trois équations à trois inconnues). Nous allons donc voir une méthode, donnée par *l'algorithme du pivot de Gauss*, qui permet de résoudre les systèmes linéaires de manière systématique.

3.1 Résolution pour des systèmes échelonnés

Cet algorithme repose sur le fait que lorsque le système est «d'une forme simple», on peut le résoudre facilement.

Définition 3.1 Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues, dont les coefficients sont donnés par les réels $a_{i,j}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$. On dit que le système (S) est *échelonné* si

$$\text{pour tout } i > j, \quad a_{i,j} = 0,$$

c'est-à-dire que le système est de la forme «triangulaire» suivante,

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & a_{3,3}x_3 & + & \dots & + & a_{3,p}x_p & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

! En gros, un système est *échelonné* si à chaque ligne, au moins une inconnue disparait de toutes les lignes suivantes. On s'intéresse aux systèmes linéaires *échelonnés* car ils sont simples à résoudre. En effet, pour les résoudre, il suffit de remonter les équations *du bas vers le haut* : la dernière nous donne la valeur de la dernière inconnue, puis en injectant cette valeur dans l'avant-dernière équation, on en déduit la valeur de l'avant dernière inconnue, et ainsi de suite.

Application Directe du Cours 3.2 Résoudre le système linéaire suivant.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 5 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On est face à un système linéaire.
- Nature de l'inconnue : un triplet (x,y,z)
- Nbre d'équations = Nbre d'Inconnues donc Nbre de solutions = 0 ou 1 ou ∞
- Le système est echelonné. On résout de bas en haut.

Comme le système est échelonné, on peut le résoudre directement de la manière suivante,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 5 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & 1 & = & 5 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & & & y & = & 2 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2 & - & 2\times 1 & = & 1 \\ & & & & y & = & 2 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc, ce système linéaire *échelonné* admet donc une *unique* solution donnée par le triplet $(1,2,1)$.

Vérification. Le triplet $(1,2,1)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & - & 2\times 1 & = & 1 & \checkmark \\ & & 2\times 2 & + & 1 & = & 5 & \checkmark \\ & & & & 1 & = & 1 & \checkmark \end{array}\right.$$

Application Directe du Cours 3.3 Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & y & + & 2z & & & = & 5 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On est face à un système linéaire.
- Nature de l'inconnue : un quadruplet (x,y,z,t)
- Nbre d'équations $\neq$ Nbre d'Inconnues donc Nbre de solutions = 0 ou ∞
- Le système est echelonné. On résout de bas en haut.
- Nbre d'équations < Nbre d'Inconnues. On choisit alors deux inconnues principales (autant que d'équations), par exemple x et y, que l'on va exprimer en fonction des inconnues secondaires, z et t.

Comme le système est échelonné, on peut le résoudre directement de la manière suivante,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & y & + & 2z & & & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & y & & & & & = & 5-2z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -4+z-t \\ y & = & 5-2z \end{array}\right.$$

Conclusion : Donc, ce système linéaire admet une *infinité* de solutions, qui sont données par les quadruplets de la forme

$$(-4+z-t, 5-2z, z, t) \qquad \text{avec } z,t \text{ des réels quelconques}$$

Par exemple, le quadruplet $(-4,5,0,0)$ est une solution (en prenant $z=t=0$), mais le quadruplet $(-3,3,1,0)$ est aussi une solution (en prenant $z=1$ et $t=0$) et ainsi de suite.

Vérification. Le quadruplet $(-4,5,0,0)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} -4 + 5 + 0 + 0 = 1 & \checkmark \\ 5 + 2\times 0 = 5 & \checkmark \end{cases}$$

3.2 Opérations élémentaires sur les lignes

L'objectif maintenant consiste à comprendre, comment transformer n'importe quel système linéaire en un système échelonné équivalent, pour pouvoir le résoudre facilement.

Définition 3.4 On appelle *opération élémentaire* sur les lignes d'un système linéaire l'une des opérations suivantes :

- *intervertir* les lignes i et j, opération que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$,
- *ajouter* à la ligne i, λ fois la ligne j ($j \neq i$), notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$,
- *multiplier* la ligne i par $\lambda \neq 0$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Proposition 3.5 Deux systèmes sont *équivalents* (et donc ont les mêmes solutions) si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes.

3.3 Algorithme du pivot de Gauss

Expliquons cet algorithme de résolution des systèmes linéaires sur des exemples.

Application Directe du Cours 3.6 On souhaite résoudre le système suivant

$$(S)\quad \begin{cases} 2x + 3z - 2y = 1 \\ -2 + 2y - z = x \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases}$$

1. On commence par "*ranger*" le système : on met les inconnues à gauche, en alignant en colonnes les mêmes inconnues, et on met le second membre (tous les termes sans inconnues) à droite.

$$(S) \iff \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases}$$

2. On choisit un *pivot* dans la première colonne (associée à la première inconnue, ici x), c'est-à-dire un terme en x, dont le coefficient est non nul, et qui va nous permettre d'éliminer tous les autres termes en x. Pour se simplifier la tâche, on pourra privilégier les termes $+x$ ou $-x$ lorsque c'est possible, et échanger les lignes pour que celle contenant le pivot soit la première.

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{-x} + 2y - z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Maintenant, on utilise ce pivot pour éliminer les autres termes en x, en faisant les opérations adéquates sur les lignes. Par exemple, pour éliminer le terme en x dans la deuxième ligne, on peut additionner la ligne 2 à deux fois la ligne 1.

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{-x} + 2y - z = 2 \\ 2y + z = 5 \\ 3x - 10y + 2z = -3 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{-x} + 2y - z = 2 \\ 2y + z = 5 \\ -4y - z = 3 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$$

À partir de maintenant, on ne touche plus à la première ligne (celle contenant le pivot qui vient de servir).

3. On recommence en ne prenant plus en compte la première ligne. On choisit un pivot dans la deuxième colonne (associée à la deuxième inconnue), et on s'en sert pour éliminer les autres termes en y sauf sur la première ligne à laquelle on ne touche plus.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & 2y & - & z & = & 2 & \\ & & \boxed{2y} & + & z & = & 5 & \\ & & & & z & = & 13 & \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}\right.$$

4. On se retrouve avec un système échelonné, que l'on résout par substitution en remontant de bas en haut.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & & & y & = & -4 \\ & & & & z & = & 13 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -23 \\ y & = & -4 \\ z & = & 13 \end{array}\right.$$

5. Conclusion : Ce système linéaire admet donc une *unique* solution donnée par le triplet $(-23, -4, 13)$.

Vérification. Le triplet $(-23, -4, 13)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2\times(-23) & - & 2\times(-4) & + & 3\times 13 & = & 1 & \quad \checkmark \\ -(-23) & + & 2\times(-4) & - & 13 & = & 2 & \quad \checkmark \\ 3\times(-23) & - & 10\times(-4) & + & 2\times 13 & = & -3 & \quad \checkmark \end{array}\right.$$

Application Directe du Cours 3.7 Résoudre le système suivant :

$$(S) \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On est face à un système linéaire.

- Nature de l'inconnue : un triplet (x, y, z)
- Nbre d'équations = Nbre d'Inconnues donc Nbre de solutions = 0 ou 1 ou ∞
- Le système est quelconque. On le résout grâce à la méthode du pivot de Gauss.

Pour cela, on utilise l'algorithme de Gauss, comme expliqué précédemment.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{x} & + & 2y & + & 3z & = & 1 & \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 & \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 & \\ & - & 6y & - & 12z & = & -7 & \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ & - & 3y & - & 6z & = & -4 & \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 & \\ & & \boxed{-\ 6y} & - & 12z & = & -7 & \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ & - & 3y & - & 6z & = & -4 & \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 & \\ & - & 6y & - & 12z & = & -7 & \\ & & & & 0 & = & -\frac{1}{2} & \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{array}\right.$$

Conclusion : Ce système linéaire n'admet *pas* de solution.

Application Directe du Cours 3.8 Résoudre le système suivant grâce à l'algorithme de Gauss,

$$(S) \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ 7a & + & 8b & + & 9c & = & -1 \\ 4a & + & 5b & + & 6c & = & 0 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On est face à un système linéaire.

- Nature de l'inconnue : un triplet (a,b,c)
- Nbre d'équations = Nbre d'Inconnues donc Nbre de solutions = 0 ou 1 ou ∞
- Le système est quelconque. On le résout grâce à la méthode du pivot de Gauss.

En mettant en place l'algorithme de Gauss, on obtient

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{a} & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ 7a & + & 8b & + & 9c & = & -1 \\ 4a & + & 5b & + & 6c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ & & \boxed{-\ 6b} & - & 12c & = & -8 \\ & & -\ 3b & - & 6c & = & -4 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ & - & 6b & - & 12c & = & -8 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{array}$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Ici, la dernière ligne ne contient aucune information, on peut l'oublier.

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ & - & 6b & - & 12c & = & -8 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Nbre d'équations < Nbre d'Inconnues. On choisit alors deux inconnues principales (autant que d'équations), par exemple a et b, que l'on va exprimer en fonction des inconnues secondaires, ici c.

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ & & b & & & = & -2c+\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & c-\frac{5}{3} \\ b & = & -2c+\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Conclusion : Ce système admet une *infinité* de solutions, données par

$$\left(c-\frac{5}{3},-2c+\frac{4}{3},c\right) \qquad \text{avec } c \text{ un réel quelconque}$$

Par exemple, le triplet $(-5/3,4/3,0)$ (avec $c=0$) est une solution du système linéaire ou encore le triplet $(-2/3,2/3,1)$ (avec $c=1$).

Vérification. Le triplet $(-5/3,4/3,0)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -\frac{5}{3} & + & 2\times\frac{4}{3} & + & 3\times 0 & = & 1 & \checkmark \\ 7\times\frac{5}{3} & + & 8\times\frac{4}{3} & + & 9\times 0 & = & -1 & \checkmark \\ 4\times\frac{5}{3} & + & 5\times\frac{4}{3} & + & 6\times 0 & = & 0 & \checkmark \end{array}\right.$$

Exercice Approfondi 3.9 Soit m un paramètre réel. Résoudre le système suivant,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On est face à un système linéaire.

- Nature de l'inconnue : un couple (x,y)
- Nbre d'équations = Nbre d'Inconnues donc Nbre de solutions = 0 ou 1 ou ∞
- Le système est quelconque. On le résout grâce à la méthode du pivot de Gauss.

En effectuant la méthode du pivot de Gauss, on obtient,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3 \\ & & (4-m^2)y & = & 6+3m \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$$

- Premier cas : si $4-m^2=0$, c'est-à-dire si $m=2$ ou $m=-2$ alors,

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & -3 \\ & & 0 & = & 6+3m \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$$

- Premier sous-cas : si $m = 2$ alors,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ & & 0 & = & 12 \end{array}\right.$$

La dernière ligne est incompatible. Dans ce cas, le système linéaire n'admet donc aucune solution.

- Deuxième sous-cas : si $m = -2$ alors,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Ici, la dernière ligne ne contient aucune information, on peut l'oublier. On obtient alors,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \iff x - 2y = -3$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Nbre d'équations < Nbre d'Inconnues. On choisit alors une inconnue principale (autant que d'équations, par exemple x, que l'on va exprimer en fonction de l'inconnue restante, ici y. On obtient alors,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \iff x = -3 - 2y$$

Dans ce cas, le système linéaire admet une infinité de solutions, données par

$$(-3 - 2y, y) \qquad \text{avec } y \text{ un réel quelconque}$$

Vérification. Par exemple, les couples $(-3, 0)$ et $(-5, 1)$ sont des solutions (entre autres). Pour le couple $(-3, 0)$, c'est bien le cas car,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -3 & - & 2\times 0 & = & -3 \\ -2\times(-3) & + & 4\times 0 & = & 6 \end{array}\right. \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \end{array}$$

- Deuxième cas : si $4 - m^2 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq 2$ et $m \neq -2$ alors,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ & & y & = & \frac{6+3m}{4-m^2} = \frac{3}{2-m} \end{array}\right.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Le système est maintenant sous forme échelonnée. On le résout de bas en haut.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & -3 \\ mx & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{6}{m-2} \\ y & = & \frac{3}{2-m} \end{array}\right.$$

Dans ce cas, le système linéaire admet donc une unique solution donnée par

$$\left(\frac{6}{m-2}, \frac{3}{2-m}\right)$$

Vérification. Par exemple, pour $m = 8$, on obtient que le couple $(1, -1/2)$ est (l'unique) solution du système. C'est bien le cas car

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & + & 8\times\left(-\frac{1}{2}\right) & = & -3 \\ 8\times 1 & + & 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) & = & 6 \end{array}\right. \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \end{array}$$