TD 03 – Fonctions usuelles

Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?

On fait attention aux trois contraintes suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe} &\quad\Leftrightarrow\quad g(x) \neq 0 \\ \sqrt{f(x)} \text{ existe} &\quad\Leftrightarrow\quad f(x) \geqslant 0 \\ \ln(f(x)) \text{ existe} &\quad\Leftrightarrow\quad f(x) > 0 \end{aligned}$$

Si la fonction présente plusieurs contraintes, l'ensemble de définition correspond à l'intersection des contraintes.

Énoncé : Déterminons l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$.

Solution : On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On a

$$x \in \mathscr{D}_f \quad\Leftrightarrow\quad 2x+3 \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \geqslant -\frac{3}{2}.$$

Exercice 1 – Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln(7x+5)$.

Comment composer deux fonctions ?

Soient f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et g une fonction définie sur $\mathscr{D}_g$.

- On se demande si, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(x) \in \mathscr{D}_g$.
  - Si c'est vrai, alors, la fonction $g \circ f$ est bien définie sur $\mathscr{D}_f$ et on peut calculer son expression.
  - Si c'est faux, alors la fonction $g \circ f$ n'est pas bien définie.
- On se demande si, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, on a $g(x) \in \mathscr{D}_f$.
  - Si c'est vrai, alors, la fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathscr{D}_g$ et on peut calculer son expression.
  - Si c'est faux, alors la fonction $f \circ g$ n'est pas bien définie.

Énoncé : Soient f et g les fonctions données par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Déterminer les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$ quand ces fonctions existent.

Solution : Tout d'abord la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^*$. Donc la fonction $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1}.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \in \mathbb{R}$. Donc la fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2+1 = \frac{1}{x^2}+1.$$

Exercice 2 – Soient f et g les fonctions données par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Déterminer les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$ quand ces fonctions existent.

Comment étudier la parité d'une fonction ?

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.

Pour montrer qu'une fonction f est paire.
1. On vérifie que $\mathscr{D}_f$ est bien symétrique par rapport à zéro.
2. On montre que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$.

Énoncé : Montrons la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x^2)$.

Solution : Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
1. L'ensemble de définition de f, donné par $\mathbb{R}$, est bien symétrique par rapport à zéro.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$f(-x) = \exp((-x)^2) = \exp(x^2) = f(x).$$

Donc f est paire.

Exercice 3 – On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^3+x)^2 \end{array}$$

Montrer que f est paire.

Pour montrer qu'une fonction f est impaire.
1. On vérifie que $\mathscr{D}_f$ est bien symétrique par rapport à zéro.
2. On montre que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Énoncé : Montrons l'imparité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+x^3}$.

Solution : Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
1. L'ensemble de définition de f, donné par $\mathbb{R}$, est bien symétrique par rapport à zéro.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$f(-x) = \frac{1}{-x+(-x)^3} = \frac{1}{-x-x^3} = -f(x).$$

Donc f est impaire.

Exercice 4 – On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x^3)-\exp(-x^3) \end{array}$$

Montrer que f est impaire.

Pour montrer qu'une fonction est ni paire ni impaire.
1. On trouve un élément $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x_0) = f(x_0)$ (essayer par exemple avec $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$,...). Ceci montre que f n'est pas paire.
2. On trouve un élément $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x_1) = f(x_1)$ (essayer par exemple avec $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$,...). Ceci montre que f n'est pas impaire.

Énoncé : Montrons que la fonction f n'est ni paire ni impaire où la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$.

Solution : Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

1. On a $f(1) = 0$ et $f(-1) = -1$. Comme $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.
2. On a $f(1) = 0$ et $f(-1) = -1$. Comme $f(-1) \neq -f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

Exercice 5 – On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+x-1}{x^4+1} \end{array}$$

Montrer que f est ni paire ni impaire.

Comment montrer des majorations/minorations ?

Pour démontrer une majoration/minoration ou un encadrement donné·e·s par le texte, on peut raisonner par équivalence pour se ramener à montrer une inégalité plus simple.

Énoncé : Montrer que pour tout $x \in [1,3[$, on a

$$-2 \leqslant -\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9}.$$

Solution : Soit $x \in [1,3[$. On a

$$\begin{aligned} -2 \leqslant -\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9} \quad & \Leftrightarrow \quad -\frac{9}{2} \leqslant -\frac{x^2}{2} \leqslant -\frac{1}{2} \qquad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{décroit sur }]-\infty,0[\\ & \Leftrightarrow \quad -9 \leqslant -x^2 \leqslant -1 \\ & \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x^2 \leqslant 9 \end{aligned}$$

Or la dernière inégalité est vraie pour tout $x \in [1,3[$ par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$. Donc l'inégalité de départ est vraie aussi pour tout $x \in [1,3[$.

Exercice 6 –

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-3,2]$, on a
$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Pour démontrer une majoration/minoration ou un encadrement donné·e·s par le texte, on peut raisonner en partant d'un encadrement de l'inconnue x et procéder par opérations pour obtenir le résultat souhaité.

Énoncé : Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a

$$\frac{e^{-x}}{x} \leqslant e^{-1}$$

Solution : Soit $x \in [1,+\infty[$.

- On a $x \geqslant 1$ donc $\frac{1}{x} \leqslant 1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroit sur $]0,+\infty[$
- On a $x \geqslant 1$ donc $x \leqslant -1$ donc $e^{-x} \leqslant e^{-1}$ car $x \mapsto \exp(x)$ croit sur $\mathbb{R}$
- Donc finalement, on a $\frac{e^{-x}}{x} \leqslant e^{-1}$.

Exercice 7 –

1. Montrer que pour tout $u \in [1,4]$, on a
$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leqslant 1.$$
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 2$. Montrer que l'on a
$$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8.$$

Comment résoudre des (in)équations avec la valeur absolue ?

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a
$$|x| = a \quad \Leftrightarrow \quad x = a \quad \text{ou} \quad x = -a.$$

Énoncé : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|3x+4| = 4$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} |3+x| = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 3+x = 4 \ \text{ ou } \ 3+x = -4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -7 \end{aligned}$$
Donc l'ensemble des solutions est
$$\{1, -7\}.$$

Exercice 8 –

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|5x+1| = 6$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+1| = x-4$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a
1. $|x| \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a.$
2. $|x| \geqslant a \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a \ \text{ ou } \ x \leqslant -a.$

Énoncé : Résoudre l'inéquation $|2x-1| \leqslant 4$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} |2x-1| \leqslant 4 \quad &\Leftrightarrow \quad -4 \leqslant 2x-1 \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 \leqslant 2x \leqslant 5 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
Donc l'ensemble des solutions est
$$\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

Exercice 9 –

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-5| < 6$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-3| \geqslant 4$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+4| \leqslant 5-3x$.

Comment manipuler la partie entière ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Énoncé : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor x+1 \rfloor = 3$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lfloor x+1 \rfloor = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \leqslant x+1 < 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \leqslant x < 3. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $[2,3[$.

Exercice 10 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 3x+5 \rfloor = 4$.

Comment manipuler les fonctions $\exp$ et $\ln$?

Pour manipuler la fonction logarithme, on doit se rappeler que, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,
3. $\ln(x^n) = n\ln(x)$,

Énoncé : Écrire le nombre suivant sous la forme $\ln(k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\ln(2) + \ln(5) - \ln(8) + 3\ln(2)$$

Solution : On a

$$\ln(2) + \ln(5) - \ln(8) + 3\ln(2) = \ln(10) - \ln(8) + 3\ln(2) = \ln\left(\frac{10}{8}\right) + \ln(2^3) = \ln\left(\frac{10}{8} \times 8\right) = \ln(10)$$

Exercice 11 –

1. Exprimer les nombres suivants uniquement à l'aide de $\ln(2)$:

$$\ln(8), \qquad \ln(\sqrt{2}), \qquad \ln(6) - \ln(3), \qquad \ln(2\mathrm{e}^2).$$

2. Soit $x > 0$. Simplifier les expressions suivantes :

$$\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}), \qquad \frac{\ln(\mathrm{e}^5)}{\ln(\mathrm{e}^3)}, \qquad -\ln(2x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \ln(\mathrm{e}^4) - \ln(\mathrm{e}^2) + \ln(\sqrt{\mathrm{e}})$$

Pour manipuler la fonction exponentielle, on doit se rappeler que, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,
2. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$,
3. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Énoncé : Écrire le nombre suivant sous la forme e^k avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\mathrm{e}^2 \times (\mathrm{e}^7)^2}{\mathrm{e}^3}$$

Solution : On a

$$\frac{\mathrm{e}^2 \times (\mathrm{e}^7)^2}{\mathrm{e}^3} = \frac{\mathrm{e}^2 \times e^{14}}{\mathrm{e}^3} = \frac{\mathrm{e}^{16}}{\mathrm{e}^3} = \mathrm{e}^{13}$$

Exercice 12 – Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{\mathrm{e}^5 \times (\mathrm{e}^4)^3}{\mathrm{e}^6}, \qquad \frac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}}, \qquad \mathrm{e}^{2\ln(x)}, \qquad \sqrt{\mathrm{e}^{2x}} \times \mathrm{e}^{-x}$$