TD 04 – Systèmes linéaires

Exercice 1 – Résolution graphique. Résoudre les systèmes linéaires suivants de manière graphique puis de manière calculatoire.

1) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -1 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2u & + & 1 & = & 3v \\ 4u & + & 6v & = & 4 \end{array}\right.$

Exercice 2 – Résolution de système échelonné. Résoudre les systèmes suivants.

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & \frac{4}{5}z & = & 1 \\ & & y & + & 6z & = & \frac{2}{3} \\ & & & & 4z & = & -2 \end{array}\right.$

Exercice 3 – Résolution par pivot de Gauss. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 8x & + & 2y & - & 2z & = & 9 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & - & 2w & = & 10 \\ u & + & 9 & + & 4w & = & -v \\ -14 & + & 5v & + & w & = & -7u \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ a & + & 2b & - & 3c & = & 6 \\ 7a & + & 4b & - & c & = & 22 \end{array}\right.$

Exercice 4 – Nombre différent d'équations et d'inconnues. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & -1 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 5z & = & 13 \\ x & + & 4y & + & z & = & 18 \end{array}\right.$

Exercice 5 – Avec un paramètre. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y & = & \lambda x \\ -x & + & 3y & = & \lambda y \end{array}\right.$$

Exercice 6 – Avec un paramètre. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & m \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 7 – Avec un paramètre partout. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} ax & + & (1-a)y & + & (1-a)z & = & a^2 \\ ax & + & (1+a)y & + & (1+a)z & = & a-a^2 \\ x & + & y & + & z & = & 1-a \end{array}\right.$$

Exercice 8 – Avec un autre formalisme. Trouver les $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$x+y = y+z = z+t = t+x.$$

Exercice 9 – Question ouverte. Donner un exemple original (non issu du cours ou du TD) d'un système linéaire n'admettant aucune solution, un autre admettant une infinité de solutions et un dernier admettant une unique solution.

Exercice 10 – En lien avec les polynômes. *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[x]$ vérifiant

$$P(-1) = 5, \qquad P(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad P(2) = 2$$

2. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[x]$ vérifiant

$$P(-1) = 4 \qquad \text{et} \qquad P(2) = 1$$

Exercice 11 – Vers la décomposition en éléments simples. On définit une fonction $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$$

Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

Exercice 12 – Un système non linéaire. Résoudre le système suivant d'inconnues x, y et z des réels strictement positifs.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x^3 & \times & y^2 & \times & z^6 & = & 1 \\ x^4 & \times & y^5 & \times & z^{12} & = & 2 \\ x^2 & \times & y^2 & \times & z^5 & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 13 – Extrait HEC 1998. Soit μ un paramètre. On considère le système suivant,

$$(S_1) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \mu x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = & 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4. Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système suivant,

$$(S_2) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \mu x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = & 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = & 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 14 – Adapté de EDHEC 2009. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}_{2n+1}[x] \to \mathbb{R}_{2n+1}[x]$ suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{2n+1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{2n+1}[x] \\ P & \longmapsto & f(P) \end{array}$$

telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[x]$,

$$f(P) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{2n+1} \times P\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Soit $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n}x^{2n} + a_{2n+1}x^{2n+1} \in \mathbb{R}_{2n+1}[x]$ tel que $f(P) = P$. Déterminer le système linéaire vérifié par le $(2n+2)$-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1})$.