# TD 04 – Systèmes linéaires (Correction)

**Exercice 1 – Résolution graphique.** Résoudre les systèmes linéaires suivants de manière graphique puis de manière calculatoire.

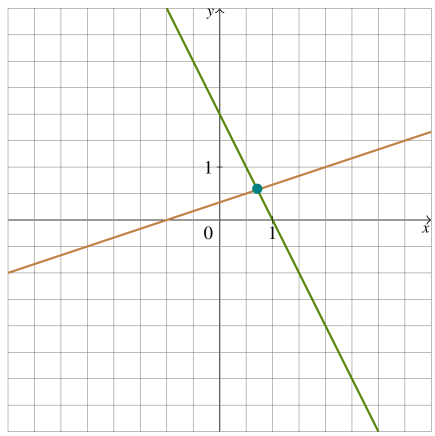
1) $\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 3y & = & -1 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{ccccc} 2u & - & 2 & = & -3v \\ 4u & + & 6v & = & 4 \end{array}\right.$

*Correction.*

1. ▶ **Approche graphique** : On peut commencer par remarquer que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 3y & = & -1 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} y & = & \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{3} \\ y & = & -2x & + & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi, résoudre ce système linéaire de deux équations à deux inconnues revient à chercher l'intersection dans le plan des deux droites d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ et $y = -2x + 2$. Cette question peut être résolue graphiquement.




▶ **Approche analytique** : On peut aussi résoudre ce système grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 3y & = & -1 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 3y & = & -1 \\ & + & 7y & = & 4 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 3y & = & -1 \\ y & = & \frac{4}{7} & & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{5}{7} \\ y & = & \frac{4}{7} \end{array}\right.$$

Ce système admet donc une $\boxed{\text{unique solution}}$, donnée par le couple

$$\boxed{\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)}$$

**Vérification.** Le couple $\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{5}{7} - 3 \times \frac{4}{7} = -\frac{7}{7} = -1 & \checkmark \\ 2 \times \frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{14}{7} = 2 & \checkmark \end{array}\right.$$

2. ▶ **Approche graphique** (non détaillée). Les deux droites sont confondues donc le système admet une infinité de solutions.

▶ **Approche analytique.** On peut aussi résoudre ce système linéaire grâce au système linéaire.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2u & - & 2 & = & -3v \\ 4u & + & 6v & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2u & + & 3v & = & 2 \\ 4u & + & 6v & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2u & + & 3v & = & 2 \\ 0 & + & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

La deuxième ligne n'apporte aucune information, on peut donc la supprimer du système.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2u & - & 2 & = & -3v \\ 4u & + & 6v & = & 4 \end{array}\right. \iff 2u + 3v = 2$$

Le système possède plus d'inconnues que d'équations. On exprime alors une inconnue (car il ne reste qu'une équation) en fonction des autres, par exemple, on exprime l'inconnue $u$ en fonction de $v$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2u & - & 2 & = & -3v \\ 4u & + & 6v & = & 4 \end{array}\right. \iff u = 1 - \frac{3}{2}v$$

Le système admet donc une infinité de solutions, données par

$$\boxed{\left(1 - \tfrac{3}{2}v, v\right) \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}}$$

**Vérification.** Soit $v \in \mathbb{R}$. Le couple $\left(1 - \frac{3}{2}v, v\right)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\left(1 - \frac{3}{2}v\right) + 3v = 2 & \checkmark \\ 4\left(1 - \frac{3}{2}v\right) + 6v = 4 & \checkmark \end{array}\right.$$

■

**Exercice 2 – Résolution de système échelonné.** Résoudre les systèmes suivants.

1) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ 4z = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + \frac{4}{5}z = 1 \\ y + 6z = \frac{2}{3} \\ 4z = -2 \end{cases}$

*Correction.*

1. Le système est échelonné, on le résout donc de "bas en haut".

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ 4z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ z = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc ce système linéaire admet une $\boxed{\text{unique solution}}$ donnée par

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$$

**Vérification.** Le triplet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ est bien une solution du système car

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 & \checkmark \\ 2\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} = 1 & \checkmark \\ 4\times\frac{1}{4} = 1 & \checkmark \end{cases}$$

2. On montre de même que le système admet une $\boxed{\text{unique solution}}$ donnée par

$$\boxed{\left(-\frac{89}{15}, \frac{11}{3}, -\frac{1}{2}\right)} \quad \checkmark$$

■

**Exercice 3 – Résolution par pivot de Gauss.** Résoudre les systèmes suivants :

$$1)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 8x & + & 2y & - & 2z & = & 9 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & - & 2w & = & 10 \\ u & + & 9 & + & 4w & = & -v \\ -14 & + & 5v & + & w & = & -7u \end{array}\right.$$

$$3)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ a & + & 2b & - & 3c & = & 6 \\ 7a & + & 4b & - & c & = & 22 \end{array}\right.$$

*Correction.*

1. On peut résoudre le système suivant grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 8x & + & 2y & - & 2z & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 10 \\ & - & 14y & + & 22z & = & 17 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 10 \\ & & & & 0 & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

   La dernière ligne est incompatible. Le système linéaire admet donc $\boxed{\text{\underline{aucune} solution.}}$

2. On peut résoudre le système suivant grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & - & 2w & = & 10 \\ u & + & 9 & + & 4w & = & -v \\ -14 & + & 5v & + & w & = & -7u \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & - & 2w & = & 10 \\ u & + & v & + & 4w & = & -9 \\ 7u & + & 5v & + & w & = & 14 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} u & + & v & + & 4w & = & -9 \\ 2u & + & v & - & 2w & = & 10 \\ 7u & + & 5v & + & w & = & 14 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} u & + & v & + & 4w & = & -9 \\ & - & v & - & 10w & = & 28 \\ & - & 2v & - & 27w & = & 77 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} u & + & v & + & 4w & = & -9 \\ & - & v & - & 10w & = & 28 \\ & & & - & 7w & = & 21 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} u & + & v & + & 4w & = & -9 \\ & - & v & - & 10w & = & 28 \\ & & & & w & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} u & = & 1 \\ v & = & 2 \\ w & = & -3 \end{array}\right.$$

   Ce système admet donc une $\boxed{\text{\underline{unique}}}$ solution donnée par $\boxed{(1,2,-3).}$

   **Vérification.** Le triplet $(1,2,-3)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2\times 1 & + & 2 & - & 2\times(-3) & = & 10 & \quad\checkmark \\ 1 & + & 2 & + & 4\times(-3) & = & -9 & \quad\checkmark \\ 7\times 1 & + & 5\times 2 & - & 3 & = & 14 & \quad\checkmark \end{array}\right.$$

3. On peut résoudre le système suivant grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ a & + & 2b & - & 3c & = & 6 \\ 7a & + & 4b & - & c & = & 22 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ & & 5b & - & 10c & = & 10 \\ & & 25b & - & 50c & = & 50 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ & & 5b & - & 10c & = & 10 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array}$$

La dernière ligne n'apporte aucune information, on peut donc la supprimer du système.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ a & + & 2b & - & 3c & = & 6 \\ 7a & + & 4b & - & c & = & 22 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ & & 5b & - & 10c & = & 10 \end{array}\right.$$

Le système contient alors plus d'inconnues que d'équations. On choisit alors deux inconnues principales (car il reste deux équations) qu'on exprime en fonction des inconnues restantes par pivot de Gauss. Par exemple, on va exprimer $a$ et $b$ en fonction de $c$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ a & + & 2b & - & 3c & = & 6 \\ 7a & + & 4b & - & c & = & 22 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ & & 5b & - & 10c & = & 10 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & 3b & + & 7c & = & -4 \\ & & & & b & = & 2c+2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -c+2 \\ b & = & 2c+2 \end{array}\right.$$

Ce système admet donc une $\boxed{\text{infinité de solutions,}}$ données par,

$$\boxed{(-c+2, 2c+2, c) \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{R}}$$

**Vérification.** Soit $c \in \mathbb{R}$. Le triplet $(-c+2, 2c+2, c)$ est bien une solution du système car

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -c+2 & - & 3\times(2c+2) & + & 7c & = & -4 & \checkmark \\ -c+2 & + & 2\times(2c+2) & - & 3c & = & 6 & \checkmark \\ 7\times(-c+2) & + & 4\times(2c+2) & - & c & = & 22 & \checkmark \end{array}\right.$$

■

**Exercice 4 – Nombre différent d'équations et d'inconnues.** Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & -1 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 5z & = & 13 \\ x & + & 4y & + & z & = & 18 \end{array}\right.$

*Correction non détaillée.* On obtient les résolutions suivantes.

- Le système linéaire admet une infinité de solutions données par

$$\boxed{(2z-4t-2, -3z+7t+3, z, t) \qquad \text{pour tout } (z,t) \in \mathbb{R}^2}$$

.

- Le système linéaire admet une unique solution donnée par

$$\boxed{(4,3,2).}$$

■

**Exercice 5 – Avec un paramètre.** Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2y & = & \lambda x \\ -x & + & 3y & = & \lambda y \end{array}\right.$$

*Correction.* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout ce système linéaire grâce au pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2y & = & \lambda x \\ -x & + & 3y & = & \lambda y \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)x & - & 2y & = & 0 \\ -x & + & (3-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & (3-\lambda)y & = & 0 \\ (2-\lambda)x & - & 2y & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & (3-\lambda)y & = & 0 \\ & & [-2+(3-\lambda)(2-\lambda)]y & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_2 + (2-\lambda)L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & (3-\lambda)y & = & 0 \\ & & [\lambda^2 - 5\lambda + 4]y & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

À ce stade, dans la deuxième ligne, on souhaite diviser par $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ pour en déduire $y$. Mais pour cela, il faut savoir si ce facteur est nul ou non.

- Premier cas : si $\lambda^2 - 5\lambda + 4 \neq 0$, c'est-à-dire si $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{1, 4\}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2y & = & \lambda x \\ -x & + & 3y & = & \lambda y \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & (3-\lambda)y & = & 0 \\ & & y & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, le système admet une unique solution donnée par $(0, 0)$.

- Deuxième cas : si $\lambda = 1$, on obtient alors,

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2y & = & \lambda x \\ -x & + & 3y & = & \lambda y \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & (3-1)y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff -x + 2y = 0
\end{aligned}$$

Le système possède plus d'inconnues que d'équations. On exprime alors une inconnue (car il ne reste qu'une équation) en fonction des autres, par exemple, on exprime l'inconnue $x$ en fonction de $y$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2y & = & \lambda x \\ -x & + & 3y & = & \lambda y \end{array}\right. \iff x = 2y$$

Dans ce cas, le système admet une infinité de solution, données par,

$$(2y, y) \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}$$

- Troisième cas : si $\lambda = 4$, on obtient alors,

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2y & = & \lambda x \\ -x & + & 3y & = & \lambda y \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & (3-4)y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff -x - y = 0 \\
&\iff x = -y
\end{aligned}$$

Dans ce cas, le système admet une infinité de solution, données par,

$$(-y, y) \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}$$

■