5 Étude qualitative d'une fonction

1 Généralités sur les fonctions

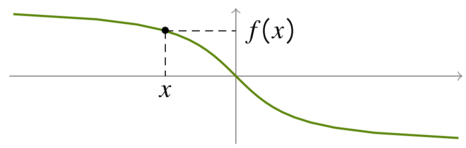
1.1 Vocabulaire de base

Définition 1.1 Le *domaine de définition* d'une fonction f, souvent noté $\mathcal{D}_f$, est l'ensemble des réels x tels que l'on puisse définir le nombre $f(x)$. On dit alors que f est définie sur $\mathcal{D}_f$, et on note

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Si $y = f(x)$ avec $x \in \mathcal{D}_f$, on dit que

- y est l'*image* de x par f,
- x est un *antécédent* de y.



Ne pas confondre f et $f(x)$, qui sont deux objets de nature mathématique différente.

Objet	Nature mathématique
f	Une fonction
$f(2)$	Un nombre réel
$f(x)$ (pour un x fixé)	Un nombre réel

Ainsi, écrire 'la fonction $f(x)$...' n'a pas de sens car $f(x)$ n'est pas une fonction, c'est l'image de x par la fonction f, et donc est un nombre réel. On écrira plutôt "la fonction f..." ou la fonction "$f : x \mapsto f(x)$...".

On pourra utiliser la proposition suivante pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction donnée.

Proposition 1.2 Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit $x \in \mathcal{D}$.

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe $\iff$ $g(x) \neq 0$,
- $\sqrt{f(x)}$ existe $\iff$ $f(x) \geqslant 0$,
- $\ln(f(x))$ existe $\iff$ $f(x) > 0$.

Étant donnée une fonction f, on commencera toujours par préciser son ensemble de définition si celui-ci n'est pas donné. Pour déterminer l'*ensemble de définition* $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f, il s'agit de trouver l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe. Cela amène généralement à résoudre une ou plusieurs (in)équations selon les contraintes données en Proposition 1.2.

Exemple 1.3

Fonction	Contrainte	$\mathcal{D}_f$
$x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4}$	$x^2 - 4 \neq 0 \iff x \neq -2$ et $x \neq 2$	$\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$
$x \mapsto \sqrt{x-3}$	$x - 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$	$[3,+\infty[$
$x \mapsto \ln(2-x)$	$2 - x > 0 \iff x < 2$	$]-\infty,2[$
$x \mapsto \sqrt{x^2+3x+2}$	$x^2 + 3x + 2 > 0 \iff x \notin]-2,-1[$	$]-\infty,-2] \cup [-1,\infty[$
$x \mapsto \ln(x^2-6x+9)$	$x^2 - 6x + 9 > 0 \iff x \neq 3$	$\mathbb{R}\backslash\{3\}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$x + 1 > 0 \iff x > -1$	$]-1,+\infty[$

Exemple 1.4 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \sqrt{6-3x}.$$

La fonction racine carrée est définie sur $[0,+\infty[$. Donc, la fonction f est définie si et seulement si

$$6-3x \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x \leqslant 6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leqslant 2.$$

Donc, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, 2].$$

1.2 Opérations sur les fonctions

Proposition 1.5 Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nom	Notation	Définition
Somme de f et g	$f+g$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Produit de f et g	$f \cdot g$ ou fg	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$
Produit de f et λ	λf	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
Quotient de f et g*	$\frac{f}{g}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

*Le quotient de f et g est bien défini que si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$.

Proposition 1.6 — Composition de fonctions. Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et g une fonction définie sur $\mathcal{D}_g$. <u>On suppose que</u> pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Alors, la *composée* $g \circ f$ (se lit "g rond f") est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, donnée par

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & f(x) \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & g(f(x)) \\
\mathcal{D}_f & \mathcal{D}_g &
\end{tikzcd}$$

(!) Avec les notations de la Proposition précédente, $g \circ f$ est bien définie mais ce n'est pas forcément le cas de $f \circ g$. La fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathcal{D}_g$ seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a $g(x) \in \mathcal{D}_f$.

Exemple 1.7 Soient f et g les fonctions données par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Tout d'abord la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminons maintenant les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$ quand ces fonctions existent.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^*$. Donc la fonction $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \in \mathbb{R}$. Donc la fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et

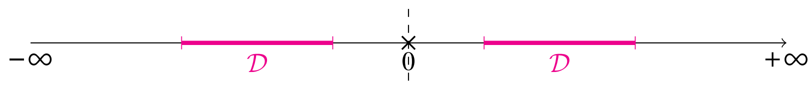
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1.$$

On peut remarquer, grâce à l'exemple précédent que, lorsque les deux fonctions f et g sont bien définies, en général, elles ne sont pas égales.

2 Parité & Imparité

Définition 2.1 Une partie de $\mathbb{R}$ est dite *symétrique par rapport à zéro* lorsque

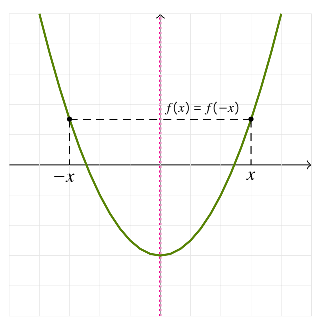
$$\text{pour tout } x \in \mathcal{D}, \qquad -x \in \mathcal{D}.$$



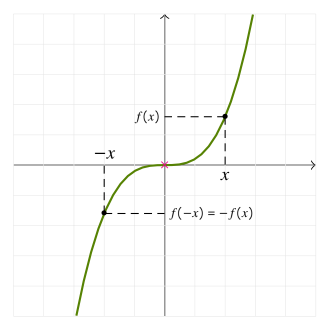
Exemple 2.2

Ensemble	$\mathbb{R}^*$	$]-1,1]$	$]-5,5[$	$[-4,-2] \cup [2,4]$	$]-\infty,-4] \cup [4,9]$
Sym. % à 0	Oui	Non	Oui	Oui	Non

Définition 2.3 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. On suppose que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à zéro. On dit que :
- f est *paire* si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$,
- f est *impaire* si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.



Représentation d'une fonction *paire* (ici $x \mapsto x^2$) : la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Représentation d'une fonction *impaire* (ici $x \mapsto x^3$) : la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Comment étudier la *parité* (à adapter pour l'imparité) d'une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$?
- Si $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0, alors f n'est pas paire.
- Si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, alors
  - pour prouver que f est *paire*, on montre que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$,
  - pour prouver que f n'est *pas paire*, on cherche un contre-exemple, c'est-à-dire on trouve un réel x pour lequel $f(-x) \neq f(x)$.

On peut aussi tracer au brouillon la courbe représentative de la fonction pour conjecturer la parité de la fonction.

Exercice 2.4 Montrer que la fonction suivante est impaire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^5}{x^4+3x^2+1} \end{array}$$

- *La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$ ne s'annule jamais.*
- Son ensemble de définition, donné par $\mathbb{R}$, est bien symétrique par rapport à 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^5}{(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{-x^5}{x^4 + 3x^2 + 1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.5 Montrer que la fonction suivante est ni paire ni impaire.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + x + 1 \end{array}$$

- *La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale).*
- On a $f(2) = 7$ et $f(-2) = 3$. Comme $f(2) \neq f(-2)$, la fonction n'est pas paire.
- Et comme $f(2) \neq -f(-2)$, la fonction n'est pas impaire non plus.

Donc la fonction f n'est ni paire ni impaire.

Exercice 2.6 — ESSEC 2005. Étudier la parité de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{array}$$

- *La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto 1 + e^x$ ne s'annule jamais.*
- Son ensemble de définition, donné par $\mathbb{R}$, est bien symétrique par rapport à 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{[e^{-x}(1+e^x)]^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

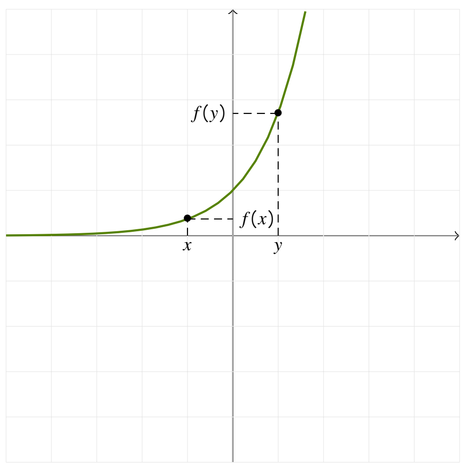
3 Monotonie

3.1 Définition de la monotonie

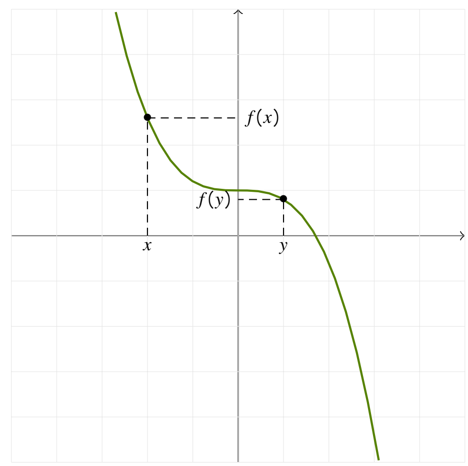
Définition 3.1 Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle de $\mathcal{D}_f$. On dit que f est

Vocabulaire	Définition
croissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
strictement croissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
décroissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$
strictement décroissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

On dit que f est (strictement) *monotone* sur I si elle est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I.



Représentation d'une fonction *croissante* sur $\mathbb{R}$, ici $x \mapsto \exp(x)$.



Représentation d'une fonction *décroissante* sur $\mathbb{R}$, ici $x \mapsto -\frac{2}{10}x^3 + 1$.

Proposition 3.2 — Opérations sur les fonctions monotones. Soient f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I.

- Si f et g sont croissantes sur I (resp. décroissantes) alors $f+g$ est croissante sur I (resp. décroissante).
- Soit $a \in \mathbb{R}$.
  - Si $a > 0$ alors f et af ont le même sens de variation.
  - Si $a < 0$ alors f et af ont des sens de variation contraires.
- On suppose que $f \circ g$ est bien définie sur I.
  - Si f et g ont la même monotonie alors $f \circ g$ est croissante.
  - Si f et g ont des monotonies opposées alors $f \circ g$ est décroissante.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I. Montrons que $f+g$ est une fonction croissante sur I. Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$. Comme f et g sont croissantes, on a

$$f(x) \leqslant f(y) \qquad \text{et} \qquad g(x) \leqslant g(y).$$

En sommant les deux inégalités, on obtient

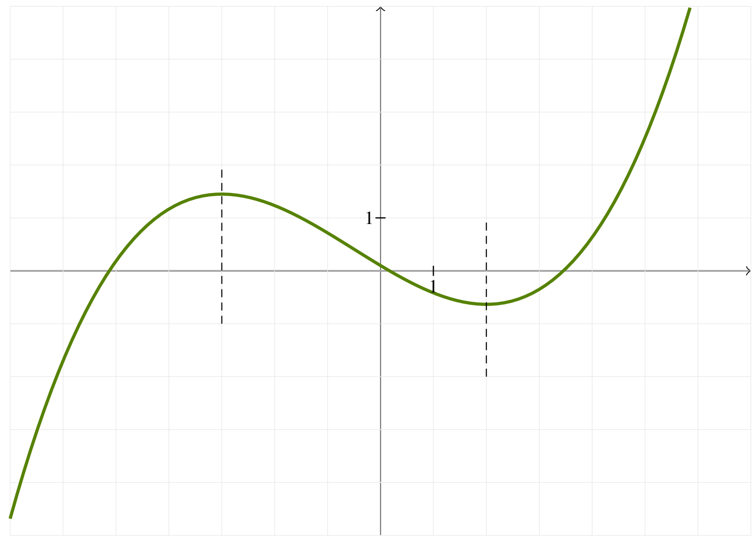
$$f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y),$$

c'est-à-dire

$$(f+g)(x) \leqslant (f+g)(y).$$

Donc la fonction $f+g$ est croissante sur I. ■

Exercice 3.3 Donner les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est représentée ci-dessous.



La fonction est croissante sur $]-\infty, -3]$, décroissante sur $[-3, 2]$, puis de nouveau croissante sur $[2, +\infty[$.

3.2 Caractérisation de la monotonie grâce à la dérivée

Proposition 3.4 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

Exercice Type Concours 3.5 — Ecricome ECS 2016. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\text{pour tout } t > 0, \qquad \varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t}$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour étudier la monotonie/les variations d'une fonction (dérivable), on étudie le signe de sa dérivée.

La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par,

$$\text{pour tout } t > 0, \qquad \varphi'(t) = \frac{\frac{1}{t} \times t - \ln(t) \times 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Or,

$$\varphi'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \ln(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(t) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t = e^1$$

De même, comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \ln(t) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(t) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t < e^1$$

On peut en déduire le tableau de signe de φ' puis les variations de φ.

x	0		e^1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Ainsi, la fonction φ est croissante sur $[0, e^1]$ et décroissante sur $[e^1, +\infty[$.

Exemple 3.6 Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour démontrer une inégalité, on peut étudier le signe de la fonction sous-jacente (par exemple, grâce à son tableau de variations, et donc en dérivant...)
On souhaite montrer que

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \ln(x) - x + 1 \leqslant 0.$$

Pour cela, on introduit la fonction suivante

$$g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) - x + 1 \end{array}$$

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\text{pour tout } x \in]0, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction g', puis les variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Du tableau de variations de g, on en déduit que

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad g(x) \leqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1.$$

Proposition 3.7 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Si la fonction f vérifie
(P) pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$)
(E) l'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions,
alors, la fonction f est *strictement* croissante (resp. décroissante) sur I.

Exemple 3.8 Montrer que la fonction f suivante est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a les propriétés suivantes.

(P) Pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$.
(E) Et l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution (donnée par $x = 0$).

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.3 Lien entre inégalités et monotonie

On rappelle les règles suivantes.

- *Ajouter* ou *soustraire* un nombre de chaque côté d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.
- *Multiplier* chaque côté d'une inégalité par le même *nombre positif* ne change pas le sens de l'inégalité.
- *Multiplier* chaque côté d'une inégalité par le même *nombre négatif* change le sens de l'inégalité.

Exercice 3.9 Montrer que, pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad &\iff \quad x + \frac{1}{x} - 2 \geqslant 0 \\ &\iff \quad \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \geqslant 0 \\ &\iff \quad x^2 + 1 - 2x \geqslant 0 \qquad \text{car } x > 0! \\ &\iff \quad (x-1)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Or, la dernière inégalité est vraie pour tout $x > 0$. Donc, par équivalence, la première inégalité est vraie pour tout $x > 0$, c'est-à-dire,

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

Exercice 3.10 Montrer que, pour tout $a, b > 0$ avec $a \neq b$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

Soit $a, b > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \quad &\iff \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 > 0 \\ &\iff \quad \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} \geqslant 0 \\ &\iff \quad a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0 \qquad \text{car } a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ donc } ab > 0! \\ &\iff \quad (a-b)^2 > 0 \end{aligned}$$

Or, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a-b)^2 \geqslant 0$ et dès que $a \neq b$, $(a-b)^2 \neq 0$. Donc, la dernière inégalité est toujours vraie pour tout $a, b > 0$ avec $a \neq b$. Donc, par équivalence, la première inégalité est vraie pour tout $a, b > 0$ avec $a \neq b$, c'est-à-dire,

$$\text{pour tout } a, b > 0,\ a \neq b, \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

La manipulation d'une inégalité est très liée à la monotonie des fonctions de la manière suivante.

- *Composer* une inégalité par une *fonction croissante* ne change pas le sens de l'inégalité.
- *Composer* une inégalité par une *fonction décroissante* change le sens de l'inégalité.

Exercice 3.11 Montrer que,

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \qquad \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Soit $x \geqslant 0$.

On a	$x \geqslant 0$	
Donc	$x+2 \geqslant 2$	en ajoutant 2 de chaque côté de l'inégalité
Donc	$\sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{2}$	en composant par $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est croissante sur $[0,+\infty[$
Donc	$\frac{1}{\sqrt{x+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$	en composant par $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est décroissante sur $]0,+\infty[$
Donc	$\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$	en multipliant par $\frac{1}{2} > 0$ de chaque côté

Ainsi, on a bien montré que

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \qquad \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 3.12 Montrer que,

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \qquad \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$$

Soit $x \geqslant 0$.

On a	$x \geqslant 0$	
Donc	$e^x \geqslant e^0$	en composant par $x \mapsto \exp x$ qui est croissante sur $\mathbb{R}$
C-à-d	$e^x \geqslant 1$	
Donc	$e^x + 1 \geqslant 2$	
Donc	$\frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$	en composant par $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est décroissante sur $]0,+\infty[$

Ainsi, on a bien montré que

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \qquad \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$$

4 Majorants, minorants, extrema

Définition 4.1 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

Vocabulaire	Définition	Sur le graphe
f *minorée* sur $\mathcal{D}$	Il existe $m \in \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geqslant m$	Il existe $m \in \mathbb{R}$ tq $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $y = m$
f *majorée* sur $\mathcal{D}$	Il existe $M \in \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leqslant M$	Il existe $M \in \mathbb{R}$ tq $\mathcal{C}_f$ en-dessous de $y = M$

On dit que f est *bornée* sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire que

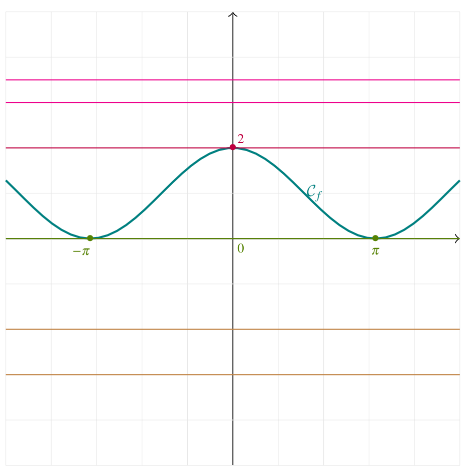
$$\underline{\text{il existe}} \text{ deux réels } m, M \text{ tels que } \underline{\text{pour tout}}\ x \in \mathcal{D}, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Définition 4.2 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

Vocabulaire	Définition
On dit que m est <u>le</u> *minimum* de f sur $\mathcal{D}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geqslant m$ et il existe $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $m = f(x_0)$
On dit que M est <u>le</u> *maximum* de f sur $\mathcal{D}$	Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leqslant M$ et il existe $x_1 \in \mathcal{D}$ tel que $M = f(x_1)$

On dit que f admet un *extremum* lorsqu'elle admet soit un minimum, soit un maximum (ou les deux).

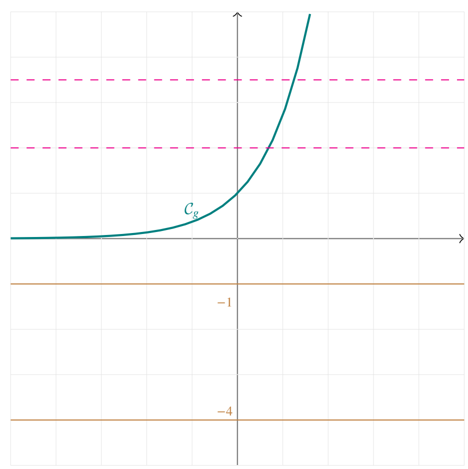
? Un minimum (resp. un maximum) est donc un minorant (resp. majorant) atteint par la fonction. On précisera toujours en quelle(s) valeur(s) le minimum (resp. maximum) est atteint.



Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + 1$.

Majorants de f : $2, 3, 3.5, \dots$
$1/2$ n'est pas un majorant
Minorants de f : $0, -2, -10, \dots$
La fonction f est bornée

Minimum qui vaut 0 atteint en $-\pi, \pi, \dots$
Maximum qui vaut 2 atteint en $0, \dots$
La fonction admet un extremum



Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g(x) = \exp(x)$.

La fonction g n'a pas de majorants
Minorants de g : -1, -2,....
La fonction g n'est pas bornée

Pas de maximum
Pas de minimum
Pas d'extremum

Attention aux pronoms utilisés, on parle d'un majorant/minimum mais du minimum/maximum.

	Unicité (si existence)
Majorant/minorant	Non
Maximum/minimum	Oui
Valeur où le min/max est atteint	Non

Exemple 4.3

Fonction	Minorant	Majorant	Minimum	Maximum
$x \mapsto x^2$	$0, -1, \ldots$	Non	0 (atteint en 0)	Non
$x \mapsto x^3$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \frac{1}{x}$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \ln(x)$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \exp(x)$	$0, -2, \ldots$	Non	Non	Non

Exemple 4.4 Déterminer les éventuels extrema de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour déterminer les éventuels extrema d'une fonction, on trace son tableau de variations (et donc on étudie le signe de sa dérivée) et on trace éventuellement l'allure de la courbe pour bien se représenter ce qui se passe.

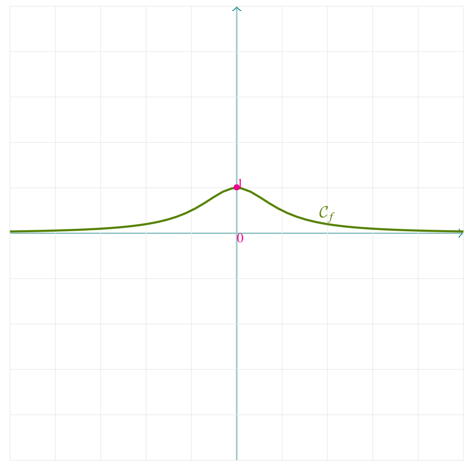
La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule jamais. De plus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

On peut en déduire le tableau de signe de f' puis les variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Grâce au tableau de variations de f, on peut tracer l'allure de sa courbe représentative.



On en déduit que la fonction f admet un maximum, qui vaut 1 et qui est atteint en 0 mais n'admet de minimum (par contre, elle est minorée par 0).