TD 05 – Étude qualitative d'une fonction

Exercice 1 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+3}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x+1}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$
5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3}x-5\right)$
6. $f_6 : x \mapsto \ln(x+3)-\ln(2x+1)$
7. $f_7 : x \mapsto x^{\frac{1}{7}}$
8. $f_8 : x \mapsto \exp(3x+2)$

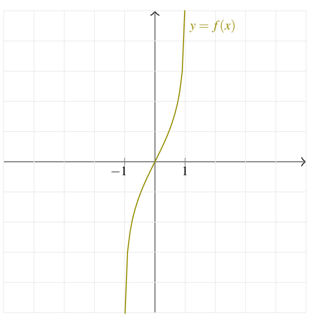
Exercice 2 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

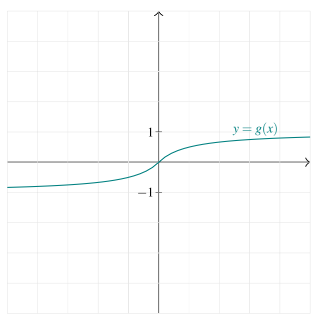
1. $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{4-x^2}$
2. $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x \ln(2x+3)$
3. $f_3 : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x-1)$
4. $f_4 : x \mapsto \ln(\ln(x))$

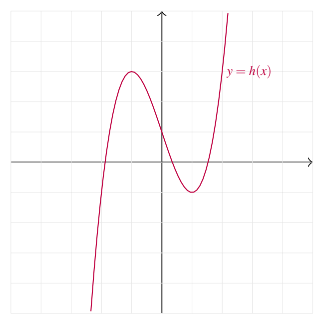
Exercice 3 – Composition de fonctions. Déterminer, lorsque cela est possible, $f \circ g$ et $g \circ f$ *(on donnera, quand c'est possible, l'ensemble de définition et l'expression de la composée).*

1. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}$$
2. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$
3. $$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$$

Exercice 4 – Représentation graphique. Pour les fonctions suivantes, à partir du graphe, donner : le domaine de définition, la parité, la monotonie, les éventuels minorants, majorants et extrema.







Exercice 5 – Parité/imparité. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On définit les trois fonctions suivantes, f_1, f_2 et f_3
$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^4+1} \qquad f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$$
Montrer que f_1 est impaire, f_2 est paire (sur leurs ensembles de définition respectifs) et f_3 est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la parité des fonctions suivantes (en précisant au préalable leur ensemble de définition).
$$f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}, \qquad f_5 : x \mapsto x^2\ln(x), \qquad f_6 : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}.$$
3. Que dire (en terme de parité) de la somme de deux fonctions paires ? De la somme de deux fonctions impaires ? De la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
4. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines qui sont opposées est paire.

Exercice 6 – Monotonie et inégalités. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que pour tout $x \in [1,3[$, on a
$$-2 \leqslant -\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9}.$$
2. Montrer que pour tout $x \in [-3,2]$, on a
$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}.$$
3. Montrer que pour tout $u \in [1,4]$, on a
$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leqslant 1.$$
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 2$. Montrer que l'on a
$$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8.$$

Exercice 7 – Étude complète d'une fonction. On considère la fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3-3x+1 \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
2. Tracer l'allure la courbe représentative de la fonction f.
3. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.
4. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

Exercice 8 – ECRICOME ECE 2023. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:
$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$
2. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*
$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f en faisant apparaître la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. *La fonction admet-elle un minimum ? un maximum ?*

Exercice 9 – EMLYON Maths E 2024. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = (x+1)e^{kx}$$
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Dresser le tableau de variations de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et 0. *On admettra que*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
2. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.
3. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.