TD05 – ÉTUDE D'UNE FONCTION

Exercice 1 – Vrai/Faux sur la parité. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses. Dans toutes les questions, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$ alors f est paire.
2. Si f est impaire alors $f(2) = -f(-2)$.
3. Si f est paire alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.
4. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$ avec $f(x) \neq 0$ alors f n'est pas paire.

Exercice 2 – Étude de fonction. On considère les fonctions *ch* et *sh* définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Justifier que les fonctions *ch* et *sh* sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les quantités suivantes :

   i) $ch(0)$ ii) $sh(0)$ iii) $ch(\ln(3))$ iv) $sh(\ln(7))$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \ln(x).$$

   Les fonctions $ch \circ f$ et $f \circ ch$ sont-elles bien définies ? Si oui, donner leur(s) expression(s).
4. Montrer que la fonction *ch* est paire et que la fonction *sh* est impaire.
5. Résoudre l'équation $sh(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
6. Démontrer que la fonction *sh* est croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Démontrer que la fonction *ch* n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
8. En utilisant les Questions 5 et 6, dresser le tableau de signe de la fonction *sh*.
9. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $ch(x) > sh(x)$.
10. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$.
11. Parmi les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentée en Figure 1, laquelle est la courbe représentative de la fonction *ch* et laquelle est la courbe représentative de la fonction *sh* ? Justifier votre réponse.

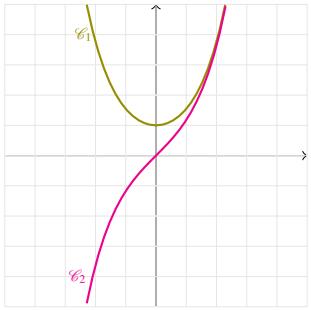

Figure 1: Représentation graphique des deux fonctions *sh* et *ch*

Exercice 3 – Inégalité avec la fonction logarithme. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}.$$

Exercice 4 – Étude de fonctions. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{8}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les quantités suivantes :

$$\text{i) } f(0) \qquad \text{ii) } f(\ln(2)) \qquad \text{iii) } f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

3. Montrer que f est ni paire, ni impaire.
4. Montrer que f est majorée par 8 et minorée par 0.
5. La fonction f est-elle bornée ? *Justifier.*
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $8 - f(x) = f(-x)$.

Exercice 5 – Extrait de concours, HEC 2008. Soit $(p,q) \in]0,1[\times]0,1[$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(p\mathrm{e}^x + q)^2 \geqslant 4pq\mathrm{e}^x.$$

Exercice 6 – Ecricome 2018. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \in [0,1]$$

Exercice 7 – On considère la fonction d'une variable réelle suivante :

$$f : x \mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est la réunion de deux intervalles que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f. *On pourra calculer la dérivée seconde f''.*

Exercice 8 – On considère la fonction définie sur $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$ par

$$\forall x > \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad f(x) = \frac{x}{\ln(x)+1}$$

1. Dresser le tableau de variations de f. Préciser si f admet ou non un extremum que l'on précisera le cas échéant.
2. Préciser si la dérivée f' admet ou non un extremum que l'on précisera le cas échéant.

Exercice 9 – Pour $x > 0$, on pose :

$$f(x) = 2x + 3\frac{\ln(x)}{x^2}$$

1. Montrer que la fonction g définie ci-dessous est positive.

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 2x^3 - 6\ln(x) + 3 \end{array}$$

2. Dresser le tableau de variations de f.
3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{D}$ la demi-droite d'équation $y = 2x$ avec $x > 0$. Représenter $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ (on précisera les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$).

Exercice 10 – Soient a, b des réels strictement positifs. Notons f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \ln(ax) \times \left(1 - \frac{b}{x}\right)$$

On suppose que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

1. Déterminer les valeurs de a et b.
2. Étudier le signe de $\ln(x) + x - 1$ en fonction des valeurs de $x \in]0,+\infty[$.
3. En déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 11 – Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$$

1. Étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$ et tracer une allure de sa courbe représentative.
2. Factoriser le polynôme $x \mapsto 1 + x^2 - 2x^3$.
3. En déduire le signe de $f(x) - x$ en fonction de $x \in]0,+\infty[$.

Exercice 12 – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n + 1.$$