TD 05 – ÉTUDE QUALITATIVE D'UNE FONCTION
(Correction)

Exercice 1 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+3}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x+1}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$
5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3}x-5\right)$
6. $f_6 : x \mapsto \ln(x+3)-\ln(2x+1)$
7. $f_7 : x \mapsto x^{\frac{1}{7}}$
8. $f_8 : x \mapsto \exp(3x+2)$

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{D}_i$ l'ensemble de définition de la fonction f_i (pour $i = 1,\dots,8$)

1. On a

$x \in \mathcal{D}_1 \iff x+3 \neq 0$
$\iff x \neq -3$

Donc $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

2. Comme $x \mapsto x^2+1$ ne s'annule jamais, on a

$\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}$

3. On a

$x \in \mathcal{D}_3 \iff 2x+1 \geqslant 0$
$\iff x \geqslant -\frac{1}{2}$

Donc

$\mathcal{D}_3 = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

4. Commençons par tracer le tableau de signe de la fonction $x \mapsto x^2-4x+3$

Résolvons $x^2-4x+3=0$.

. On calcule le discriminant

$\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 3$
$= 16-12$
$= 4$

. Comme $\Delta > 0$, deux racines :

$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

et $x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Donc on a

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, on a

$x \in \mathcal{D}_4 \iff x^2-4x+3 \geqslant 0$
$\iff x \in]-\infty, 1] \cup [3;+\infty[$

Donc

$\mathcal{D}_4 =]-\infty, 1] \cup [3;+\infty[$.

5. On a

$x \in \mathcal{D}_5 \iff \frac{x}{3} - 5 > 0$
$\iff x > 15$

Donc $\mathcal{D}_5 =]15;+\infty[$

6. On a

$x \in \mathcal{D}_6 \iff \left(\begin{array}{c} x+3>0 \\ \text{et} \\ 2x+1>0 \end{array}\right)$

$\iff \left(\begin{array}{c} x>-3 \\ \text{et} \\ x>-\frac{1}{2} \end{array}\right)$

Donc

$\mathcal{D}_6 =]-3;+\infty[\cap]-\frac{1}{2};+\infty[$
$=]-\frac{1}{2};+\infty[$

7. $\mathcal{D}_7 =]0;+\infty[$ (car fonction puissance réelle) (*)

8. Comme les fonctions $x \mapsto 3x+2$ et $x \mapsto \exp(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$, par composée, la fonction f_8 est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_8 = \mathbb{R}$.

Exercice 2 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{4-x^2}$
2. $f_2 : x \mapsto e^x \ln(2x+3)$
3. $f_3 : x \mapsto \ln(e^x - 1)$
4. $f_4 : x \mapsto \ln(\ln(x))$

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{D}_i$ l'ensemble de définition de la fonction f_i (pour $i = 1, \dots, 4$)

1. On a

$$x \in \mathcal{D}_1 \Longleftrightarrow (x+1>0 \text{ et } 4-x^2 \neq 0)$$
$$\Longleftrightarrow (x>-1 \text{ et } x=2 \text{ et } x=-2)$$

Donc $\mathcal{D}_1 =]-1;+\infty[- \setminus\{2,-2\}$
$=]-1;+\infty[- \{2\}$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(2x+3)$ est bien définie sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$ (car $2x+3>0 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$). Donc la fonction f_2 est bien définie sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$

$$\mathcal{D}_2 =]-\frac{3}{2};+\infty[$$

3. On a

$$x \in \mathcal{D}_3 \Longleftrightarrow e^x - 1 > 0$$
$$\Longleftrightarrow e^x > 1$$
$$\Longleftrightarrow x > \ln(1) = 0$$

Donc $\mathcal{D}_3 =]0;+\infty[$.

4. On a

$$x \in \mathcal{D}_4 \Longleftrightarrow \ln(x) > 0 \quad \text{et } x>0$$
$$\Longleftrightarrow x > e^0 = 1 \quad \text{et } x>0$$

Donc $\mathcal{D}_4 =]1;+\infty[$

Exercice 3 – Composition de fonctions. Déterminer, lorsque cela est possible, $f \circ g$ et $g \circ f$ *(on donnera, quand c'est possible, l'ensemble de définition et l'expression de la composée).*

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}$

2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

3. $f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$

1. Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. Donc les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   - $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^3$
   - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 1 = x^3 - 1$

2. • Pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \in \mathcal{D}_g = [0;+\infty[$. Donc $g \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, on a
$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

   •• Pour tout $x \in \mathcal{D}_g = [0;+\infty[$, $g(x) = \sqrt{x} \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Donc $f \circ g$ est bien définie sur $\mathcal{D}_g = [0;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_g = [0;+\infty[$, on a
$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

3. • Pour tout $x \in \mathcal{D}_f =]0;+\infty[$, $f(x) = \ln(x) \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Donc $g \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}_f =]0;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f =]0;+\infty[$,
$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 - 1 = (\ln(x))^2 - 1.$$

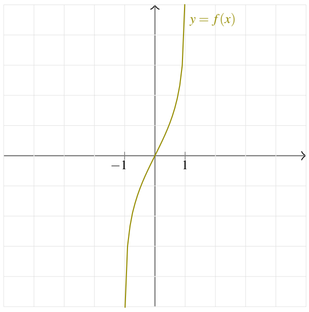
   •• On se demande maintenant si

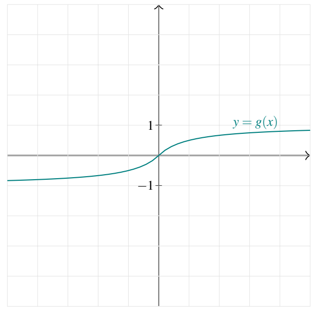
   pour tout $x \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathcal{D}_f =]0;+\infty[$

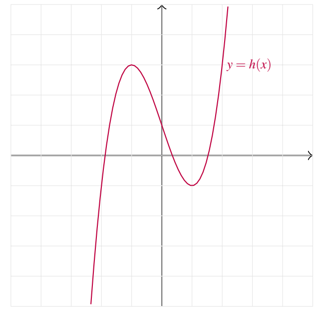
   C'est faux car pour $x = 0$, $g(0) = -1 \notin \mathcal{D}_f =]0;+\infty[$

   donc la composée $f \circ g$ n'est pas bien définie.

Exercice 4 – Représentation graphique. Pour les fonctions suivantes, à partir du graphe, donner : le domaine de définition, la parité, la monotonie, les éventuels minorants, majorants et extrema.







- Pour la fonction f :
  - domaine de déf : $]-1,1[$
  - la fct est impaire
  - la fct est strict. croissante sur $]-1,1[$
  - pas de majorants/minorants
  - pas d'extrema
- Pour la fonction g :
  - domaine de déf : $\mathbb{R}$
  - la fct est impaire
  - la fct est strict. croissante sur $\mathbb{R}$
  - majorants : $1, 2, \ldots$
  - minorants : $-1, -2, \ldots$
  - pas d'extrema
- Pour la fonction h :
  - domaine de déf : $\mathbb{R}$
  - la fct est ni paire ni impaire
  - la fct est strict. croissante sur $]-\infty, -1]$, est strict. décroissante sur $[-1, 1]$ et strict croissante sur $[1;+\infty[$
  - pas de majorants/minorant
  - pas d'extrema

Exercice 5 – Parité/imparité. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On définit les trois fonctions suivantes, f_1, f_2 et f_3

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^4+1} \qquad f_2 : x \mapsto e^{x^2} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$$

Montrer que f_1 est impaire, f_2 est paire (sur leurs ensembles de définition respectifs) et f_3 est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la parité des fonctions suivantes (en précisant au préalable leur ensemble de définition).

$$f_4 : x \mapsto e^x - e^{-x}, \qquad f_5 : x \mapsto x^2 \ln(x), \qquad f_6 : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}.$$

3. Que dire (en terme de parité) de la somme de deux fonctions paires ? De la somme de deux fonctions impaires ? De la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
4. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines qui sont opposées est paire.

1. •• Soit $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{x^4+1} \end{array}$

Tout d'abord, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^4+1$ ne s'annule jamais.

- le domaine de f_1 est sym % à zéro.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_1(-x) = \frac{-x}{(-x)^4+1} = -\frac{x}{x^4+1} = -f_1(x).$$

Donc f_1 est impaire.

•• Soit $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x^2) \end{array}$.

Tout d'abord, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme composée des deux fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto x^2$ qui sont définies sur $\mathbb{R}$.

- le domaine de f_2 est bien sym % à zéro.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_2(-x) = \exp((-x)^2) = \exp(x^2) = f(x)$$

Donc f_2 est paire.

•• Soit $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1} \end{array}$

Tout d'abord, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^2+1$ ne s'annule jamais.
Déjà le domaine de f_3 est bien symétrique % à zéro.

- On a $f_3(1) = 0$ et $f_3(-1) = -1$.
- Comme $f_3(1) \neq f_3(-1)$, f_3 n'est pas paire.
- Comme $f_3(1) \neq -f_3(-1)$, f_3 n'est pas impaire.

2. •• Soit $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x) - \exp(-x) \end{array}$

Tout d'abord, $x \mapsto \exp(-x)$ est bien déf sur $\mathbb{R}$ comme composée des 2 fcts $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto -x$ définie sur $\mathbb{R}$. Puis f_4 est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme soustraction de 2 fcts définies sur $\mathbb{R}$.

De plus, le domaine de f_4 est sym % à 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_4(-x) = \exp(-x) - \exp(-(-x)) = \exp(-x) - \exp(x) = -f_4(x)$$

Donc f_4 est impaire.

•• Soit $f_5 : \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \ln(x) \end{array}$.

Comme $x \mapsto x^2$ est déf. sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ est déf sur $]0,+\infty[$, f_5 est bien déf sur $]0,+\infty[$.

Comme le domaine n'est pas symétrique par rapport à zéro, f_5 n'est ni paire ni impaire.

•• Soit $f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + \frac{1}{x} \end{array}$.

Comme $x \mapsto x^3$ est déf sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, f_6 est déf sur $\mathbb{R}^*$.
le domaine de f_6 est sym % à 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$f_6(-x) = (-x)^3 + \frac{1}{(-x)} = -x^3 - \frac{1}{x} = -f_6(x)$$

Donc f_6 est impaire.

3. la somme de deux fonctions paires est paire.

Soient f et g deux fonctions paires définies sur un ens $\mathcal{D}$ sym. % à zéro.
Montrons que la fct $f+g$, définie aussi sur $\mathcal{D}$ est paire.
Soit $x \in \mathcal{D}$. On a

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= f(x) + g(x) \quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont paires} \\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

Donc $f+g$ est paire.

.. De même, la somme de deux fonctions impaires est impaire.
.. Pour la somme d'une fonction paire et d'une fct impaire, on ne peut rien dire

la fct $x \mapsto x$ est impaire et la fct $x \mapsto 1$ est paire.
Pourtant, la fct $x \overset{f}{\mapsto} x+1$ est ni paire ni impaire :
$f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$

4. Un polynôme P de degré 2 qui admet deux racines notées x_1 et x_2 peut toujours s'écrire :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \lambda(x - x_1)(x - x_2)$

Ici, on suppose que les racines sont opposées, i.e
$$x_2 = -x_1$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}P(x) &= \lambda(x - x_1)(x + x_1) \\ &= \lambda(x^2 - x_1^2)\end{aligned}$$

Montrons que P est pair.
* Son domaine de définition, $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0.
* Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}P(-x) &= \lambda((-x)^2 - x_1^2) \\ &= \lambda(x^2 - x_1^2) \\ &= P(x)\end{aligned}$$

Donc P est paire

Exercice 6 – Monotonie et inégalités. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que pour tout $x \in [1,3[$, on a
$$-2 \leqslant -\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9}.$$
2. Montrer que pour tout $x \in [-3,2]$, on a
$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}.$$
3. Montrer que pour tout $u \in [1,4]$, on a
$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leqslant 1.$$
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 2$. Montrer que l'on a
$$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8.$$

1. Soit $x \in [1,3[$.

•• On a $x \geqslant 1$
donc $x^2 \geqslant 1$ car $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $-x^2 \leqslant -1$ car $-1<0$
donc $-\frac{1}{x^2} \geqslant -1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$
donc $-\frac{2}{x^2} \geqslant -2$ car $2>0$

•• On a $x \leqslant 3$
donc $x^2 \leqslant 9$ car $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $-x^2 \geqslant -9$ car $-1<0$
donc $-\frac{1}{x^2} \leqslant -\frac{1}{9}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$
donc $-\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9}$ car $2>0$

2. Soit $x \in [-3,2]$. On a

$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2} \iff \frac{1}{18} \leqslant \frac{1}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{1}{2}$
car $3>0$

$\iff 18 \geqslant (x-1)^2+2 \geqslant 2$
car tous les termes sont >0
et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strict. décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff 18 \geqslant (x-1)^2+2$
et $(x-1)^2+2 \geqslant 2$

$\iff (x-1)^2 \leqslant 16$ et $\underbrace{(x-1)^2 \geqslant 0}_{\text{toujours vrai}}$

$\iff (x-1)^2 \leqslant 16$

$\iff |x-1| \leqslant 4$
car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
et $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$
car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\iff -4 \leqslant x-1 \leqslant 4$
$\iff -3 \leqslant x \leqslant 5$

La dernière inégalité est vraie pour $x \in [-3,2]$.
Donc, pour tout $x \in [-3,2]$, on a
$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}$

3. Soit $u \in [1,4]$.

• $u \geqslant 1$ donc $u-1 \geqslant 0$
et $\sqrt{u} \geqslant \sqrt{1} = 1$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
donc $\sqrt{u}+u-1 \geqslant 1$
donc $\frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leqslant 1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et les deux termes sont >0

• $u \leqslant 4$ donc $u-1 \leqslant 3$
et $\sqrt{u} \leqslant \sqrt{4} = 2$ car ...
donc $\sqrt{u}+u-1 \leqslant 5$
donc $\frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \geqslant \frac{1}{5}$ car ...

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 2$.
On a (*) $4 \leqslant a^2 \leqslant 9$ car tous les termes sont $\geqslant 0$ et $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$
et $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant 1$ car tous les termes sont >0 et $x \mapsto \frac{1}{x}$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
donc $1 \leqslant \frac{2}{b} \leqslant 2$ car $2>0$
donc (**) $-2 \leqslant -\frac{2}{b} \leqslant -1$
En sommant les inégalités (*) et (**), on obtient
$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8$.

Exercice 7 – Étude complète d'une fonction. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f. *On admet que*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Tracer l'allure la courbe représentative de la fonction f.
3. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.
4. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

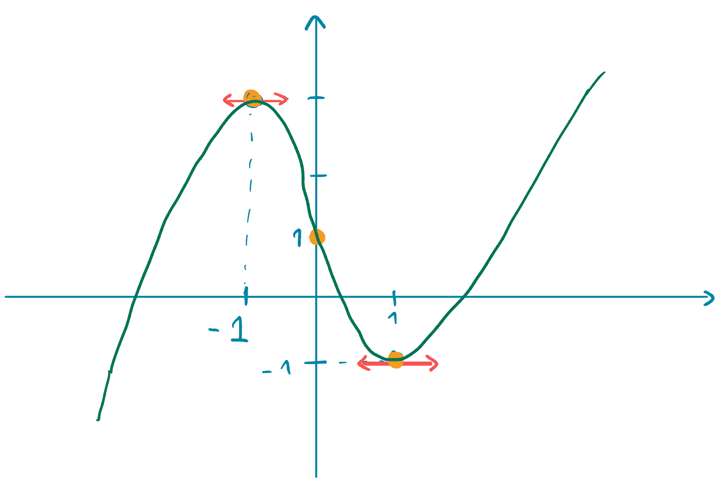
1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3(x-1)(x+1)$$

On peut en déduire le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2.



3 • pas de minimum car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
• pas de maximum car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4. $f(-1) \neq f(1)$ donc f pas paire
$f(-1) \neq -f(1)$ donc f pas impaire