TD 04 – Somme & Produit

Comprendre la notation $\sum$

Énoncé : Écrire la somme suivante à l'aide des $\cdots$

$$\sum_{k=4}^{33} \frac{k+1}{k}$$

Solution : On doit identifier le terme général, l'indice de départ et celui de fin.

- Terme général : $\frac{k+1}{k}$
- Indice de départ : $k=4$
- Indice de fin : $k=33$

Donc

$$\sum_{k=4}^{33} \frac{k+1}{k} = \frac{4+1}{4} + \frac{5+1}{5} + \cdots + \frac{33+1}{33} = \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{34}{33}$$

Exercice 1 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes à l'aide des $\cdots$ (on ne demande pas de calculer ces sommes).

1) $\sum_{k=1}^{20} k^3$ 2) $\sum_{\ell=2}^{8} 3\ell$ 3) $\sum_{i=1}^{n} (-x)^i$ 4) $\sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1)$

Énoncé : Écrire la somme suivante à l'aide du symbole $\sum$

$$\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n)$$

Solution : On doit identifier le terme général, l'indice de départ et celui de fin.

- Terme général : tous les termes sont de la forme $\ln(k)$ avec k un entier
- Indice de départ : le premier terme est $\ln(2)$ donc de la forme $\ln(k)$ avec $k=2$
- Indice de fin : le dernier terme est $\ln(n)$ donc de la forme $\ln(k)$ avec $k=n$

Donc

$$\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$$

Exercice 2 – Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

1) $2+4+6+8+\cdots+50$
2) $1+2^6+3^6+4^6+\cdots+(n+1)^6$ (pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné)
3) $1-a+a^2-a^3+\cdots+a^{100}$ (pour un $a \in \mathbb{R}^*$ donné)

Les sommes de références

Commencer par remplir le tableau suivant.

Nom de la somme	Somme	Valeur
Somme d'une constante	$\sum_{k=p}^{q} a$	
Somme des entiers	$\sum_{k=1}^{n} k$	
Somme des entiers au carré	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	
Somme géométrique	$\sum_{k=p}^{q} x^k$	

Énoncé : Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{3^j}{4^{j+1}} \qquad\qquad \sum_{k=3}^{14} (k+3)k$$

Solution : Dans la première somme, on somme des *puissances*, on cherche donc à faire apparaître une *somme géométrique*.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \frac{3^j}{4^{j+1}} &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n} \frac{3^j}{4^j} && \text{on sort ce qui ne dépend pas de l'indice}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^j && \text{on met le terme général sous la forme } x^j\\
&= \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{3}{4}} && \text{on utilise la formule pour les sommes géométriques}\\
&= 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} && \text{on finit le calcul}
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on somme des entiers et des carrés d'entiers, on cherche donc à faire apparaître une *somme des entiers* et une *somme des entiers au carré*.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{14} (k+3)k = \sum_{k=3}^{14} (k^2+3k)&\\
&= \sum_{k=3}^{14} k^2 + 3\sum_{k=3}^{14} k && \text{on coupe les 2 sommes et sort ce qui ne dépend pas de } k\\
&= \sum_{k=1}^{14} k^2 - 1 - 2^2 + 3\left(\sum_{k=1}^{14} k - 1 - 2\right) && \text{on rajoute et enlève les termes qui manquent}\\
&= \frac{14(14+1)(2\times 14+1)}{6} - 3 + 3\times\frac{14\times(14+1)}{2} - 9\\
&= 1316 && \text{on finit le calcul}
\end{aligned}$$

Exercice 3 – En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{i=0}^{n} 4i$
2) $\sum_{\ell=4}^{n} \frac{\ell-1}{4}$
3) $\sum_{j=1}^{n} e^{-j}$
4) $\sum_{\ell=4}^{n+1} \frac{2^\ell}{3^{\ell-2}}$
5) $\sum_{k=2}^{n+1} 3$
6) $\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$
7) $\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{10^k}$
8) $\sum_{j=1}^{n-1} (5j+2-n)$
9) $\sum_{j=1}^{n-1} 2^j$
10) $\sum_{i=1}^{2N} i(2i+3)$
11) $\sum_{k=13}^{42} k$
12) $\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$

Exercice 4 – En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

1) $2+4+6+\cdots+100$
2) $1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n$
3) $1+3+5\cdots+99$
4) $2\times 5^2+2\times 5^3+\cdots+2\times 5^{2n+2}$

Exercice 5 – Démontrer *par récurrence* que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On pourra s'appuyer sur la démonstration de la Proposition 1.8 faite en classe.

Sommes télescopiques

Énoncé : Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. En déduire la valeur de la somme suivante
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

Solution : D'abord, pour $k \geqslant 2$, on a
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}.$$
On en déduit que
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Exercice 6 –

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1\}$, on a
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 7 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}}$$

Indication : faire apparaître un télescopage (pour la première somme, en utilisant les propriétés algébriques du logarithme, pour la deuxième somme, en multipliant par la quantité conjuguée.)

Changement d'indices

Énoncé : À l'aide d'un changement d'indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (compléter les trous)
$$\sum_{k=4}^{n} (k+3)^2 = \sum_{j=\cdots}^{\cdots} j^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{n} x^{i+2} = \sum_{k=1}^{\cdots} \cdots$$

Solution : Pour s'aider, on peut écrire les sommes avec les $\cdots$. On a
$$\sum_{k=4}^{n} (k+3)^2 = 7^2 + 8^2 + 9^2 + \cdots + (n+3)^2 = \sum_{j=7}^{n+3} j^2$$
et
$$\sum_{i=0}^{n} x^{i+2} = x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} x^{k+1}$$

Exercice 8 – À l'aide d'un changement d'indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (compléter les trous)

1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \sum_{i=\cdots}^{\cdots} \frac{i}{i-1}$ 2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{k=1}^{\cdots} \cdots$ 3) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} (i-2) = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} k$

Produit

Énoncé : Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n} 5 \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=2}^{12} 3^i$$

Solution : Pour calculer un produit, on peut commencer par l'écrire avec les $\cdots$. On a

$$\prod_{k=1}^{n} 5 = 5 \times 5 \times \cdots 5 = 5^{\text{nbre termes}} = 5^{n-1+1} = 5^n$$

et

$$\prod_{i=1}^{12} 3^i = 3 \times 3^2 \times 3^3 \times \cdots 3^{12} = 3^{1+2+3+\cdots+12} = 3^{\frac{12\times 13}{2}} = 3^{78}$$

Exercice 9 – Calculer les produits suivants.

1) $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} 2$ 2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 2^k$ 3) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} 3x$ 4) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k$

Énoncé : Calculer le produit suivant :

$$\prod_{k=1}^{43} \frac{(k+1)^2}{k^2}$$

Solution : Pour calculer un produit, on peut commencer par l'écrire avec les $\cdots$. On a

$$\prod_{k=1}^{43} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{2^2}{1^2} \times \frac{3^2}{2^2} \times \frac{4^2}{3^2} \times \cdots \times \frac{43^2}{42^2} \times \frac{44^2}{43^2} = \frac{44^2}{1^2} = 44^2 = 1936$$

Exercice 10 – Calculer les produits suivants.

1) $\displaystyle\prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k}$ 2) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

Indication : faire apparaître un télescopage.

Factorielle

Énoncé : Écrire le nombre suivant en utilisant une/des factorielle(s) :

$$7 \times 8 \times 9 \times \cdots \times 103$$

Solution : On rajoute/retranche ce qu'il manque pour faire apparaitre une factorielle.

$$7 \times 8 \times 9 \times \cdots \times 103 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 103}{1 \times 2 \times \cdots \times 6} = \frac{103!}{6!}$$

Exercice 11 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

1) $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$,

2) $n(n-1)(n-2)$

3) $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$

4) $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$

Énoncé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier au maximum la quantité suivante :

$$\frac{(n+3)!}{(n-1)!}$$

Solution : On utilise la définition de la factorielle, puis on simplifie

$$\frac{(n+3)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3)\times(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1}{(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1} = (n+3)(n+2)(n+1)n$$

Exercice 12 – Simplifier au maximum les quantités suivantes :

1) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$ 2) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ 3) $(n+1)!+(n-1)!$

Énoncé : Calculer le produit suivant :

$$\prod_{k=1}^{43} k^4$$

Solution : Pour calculer un produit, on peut commencer par l'écrire avec les $\cdots$. On a

$$\prod_{k=3}^{43} k^4 = 3^4\times 4^4\times 5^4\times\cdots\times 43^4 = (3\times 4\times 5\times\cdots\times 43)^4 = \left(\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times 43}{1\times 2}\right)^4 = \left(\frac{43!}{2}\right)^4$$

Exercice 13 – Écrire les produits suivants grâce à une/plusieurs factorielle(s).

1) $\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} j^2$ 2) $\displaystyle\prod_{k=4}^{n} k^3$

Somme double

Énoncé : Calculer la somme double suivante

$$S = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2$$

Solution : Pour s'aider, on peut faire le tableau comportant tous les éléments de la somme.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$
$i=1$	1^2	1^2	$\cdots$	1^2
$i=2$	2^2	2^2	$\cdots$	2^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$	n^2	n^2	$\cdots$	n^2

En sommant par *colonne*, S vaut

$$\begin{aligned}&(1^2+\cdots+n^2)+(1^2+\cdots+n^2)+\cdots+(1^2+\cdots+n^2)\\&= n\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\&= n\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

On peut aussi directement rédiger de la manière suivante :

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(ni^2) = n\sum_{i=1}^{n} i^2 = n\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 14 – Calculer les sommes doubles suivantes :

1) $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} (i+j)$. 2) $V = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j$ 3) $W = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x^{i+j}$ (pour un $x\in\mathbb{R}$)

Indication : on pourra faire le tableau comportant tous les éléments de la somme.