Chapitre 7 : Étude d'une suite numérique

1 Notion de suite

Définition 1.1 Une suite de réels est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est noté u_n, et est appelé terme général de la suite.
- La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Certaines suites ne sont pas définies sur tout $\mathbb{N}$. De manière générale, si une suite n'est définie qu'à partir du rang n_0, on note $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Terme général	Premier terme licite	Notation de la suite
$\frac{1}{n}$		
$\sqrt{n-2}$		
$\ln(n)$		
$\frac{1}{n^2+1}$		

1.1 Modes de définition d'une suite

On peut définir une suite de plusieurs façons.

- De manière **explicite** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est directement exprimé en fonction de n. Ainsi, tous les termes de la suite se calculent de manière directe.
- Par **récurrence** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est exprimé en fonction d'un ou plusieurs termes précédents $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.
- De manière **implicite** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n vérifie une certaine propriété donnée dépendant de n. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 + x - 1 = n$. Dans ce cas, on a rarement accès aux valeurs de la suite. *Ce type de suites sera étudié dans un autre chapitre.*

Exemple 1.2

Définition	Explicite/Récurrence	Calcul de termes		
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$		$u_1 =$	$u_2 =$	$u_{10} =$
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 - 1$		$u_0 =$	$u_1 =$	$u_{10} =$
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n + 2$		$v_0 =$	$v_1 =$	$v_{12} =$
$u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 3u_n + 2$		$u_1 =$	$u_2 =$	$u_3 =$
$w_0 = 0, w_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$		$w_0 =$	$w_1 =$	$w_2 =$

1.2 Représentation graphique

Pour étudier une suite, et en particulier étudier son comportement “à l’infini”, on peut la représenter graphiquement pour essayer de “voir” ce qu’il se passe.

Pour les suites définies de manière explicite.

On peut représenter graphiquement une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière explicite de deux manières différentes.

- On peut placer **dans le plan** les points de coordonnées (n, u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.
- On peut aussi représenter la suite comme un ensemble de valeurs **le long d’un axe**.

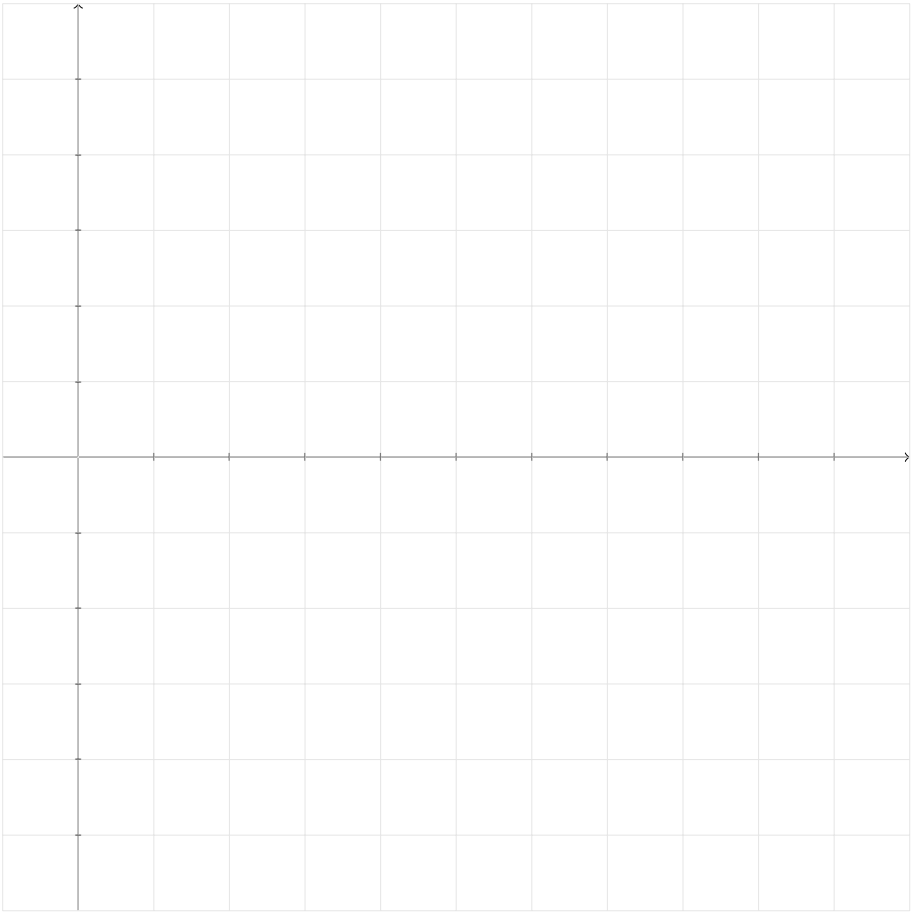
Exemple 1.3 Représentons graphiquement, des deux manières différentes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2 - 5.$$

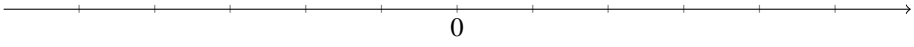
Pour s’aider, on peut calculer les premiers termes de la suite

$u_0 =$ $u_1 =$ $u_2 =$ $u_3 =$ $\ldots$

- Dans un premier temps, on peut placer dans le plan les points (n, u_n).



- Dans un second temps, on peut placer les valeurs de la suite le long d’un axe.



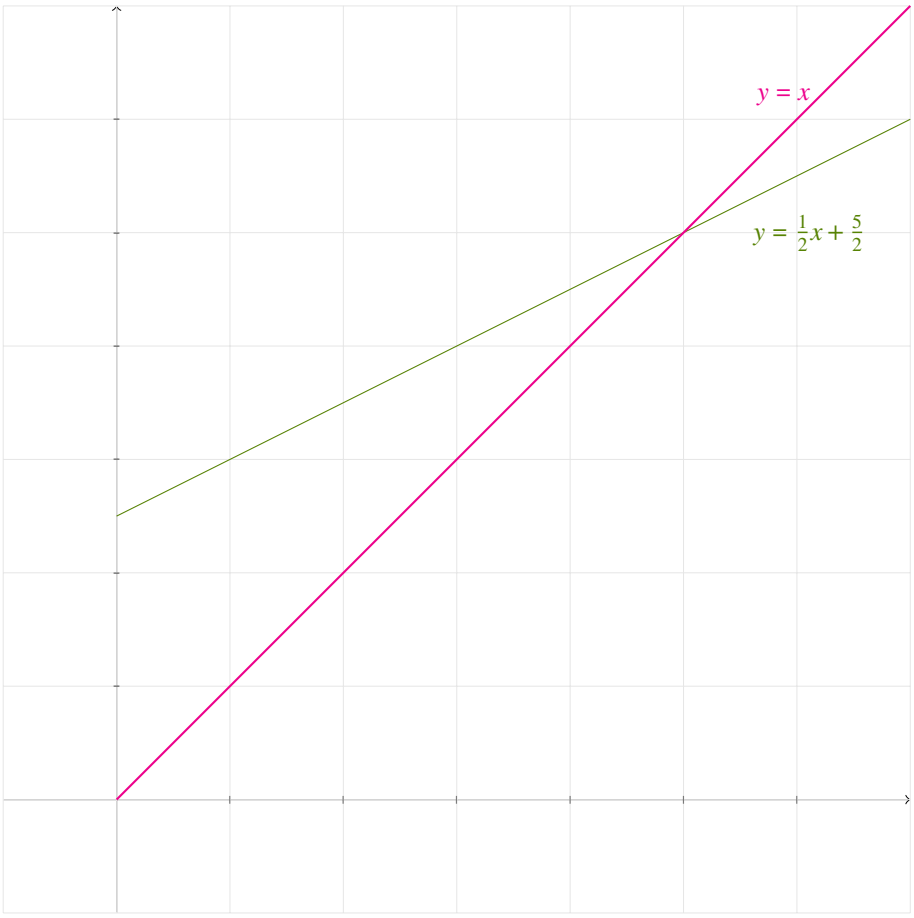
Pour les suites définies de manière implicite.

Pour représenter graphiquement, dans le plan, une suite définie définie par récurrence, on peut

- calculer les premiers termes de la suite à la main et les placer sur le graphique,
- soit construire directement sa représentation graphique à l'aide de la droite $y = x$.

Exemple 1.4 Représentons graphiquement, sans calculer les premiers termes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{2}.$$



On peut vérifier à la main les premières valeurs

$$u_0 = \qquad u_1 = \qquad u_2 = \qquad u_3 = \qquad \dots$$

2 Démonstration par récurrence

? Pour prouver un résultat par **récurrence**, on utilise la rédaction suivante.

Notons, pour tout $n \geqslant n_0$, par $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante

$$\mathcal{P}(n) : \quad \text{« ..... »}$$

- **Initialisation** : Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

  Insérer raisonnement mathématique

  Donc $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** :

  On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geqslant n_0$.
  Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

  Insérer raisonnement mathématique

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \geqslant n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 2.1

(Info) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.
(But) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 7 \times 3^n$.

3 Étude qualitative d'une suite

3.1 Variation d'une suite

Définition 3.1 — **Suite constante & Suite stationnaire.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n.$$

  Dans ce cas, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = C$.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang :

$$\text{il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Exemple 3.2 Étudions la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = |u_n^2 - 2| \end{cases}$$

Définition 3.3 — **Monotonie d'une suite.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que la suite est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Comment étudier les variations d'une suite ?

Pour étudier la monotonie, on dispose de plusieurs méthodes.

▶ **Méthode 1 - Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

▶ Méthode 2 - Si on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

▶ Méthode 3 - Passer par l'étude d'une fonction. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de f pour en déduire celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▶ Méthode 4 - On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Exemple 3.4 Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par,

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n^2 + v_n + 2$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \dfrac{1}{5^n}$

Exemple 3.5 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(n)$.

3.2 Suites majorées/minorées/bornées

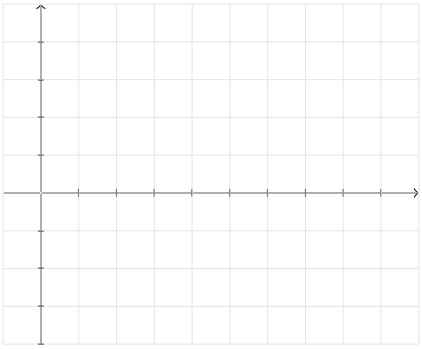
Définition 3.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 3.7 Déterminer si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée/minorée/bornée, où

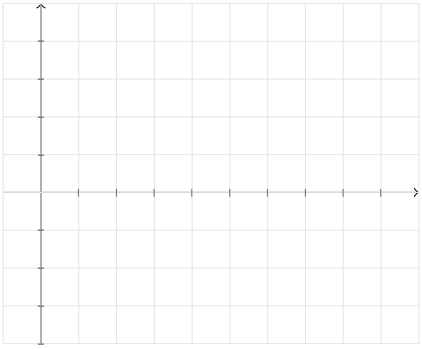
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n}.$$

🔑 **Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



Exemple 3.8 Déterminer si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ est majorée/minorée/bornée.

🔑 **Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



Proposition 3.9 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $M \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par M si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M.

Démonstration. Cette proposition provient de l'équivalence suivante,

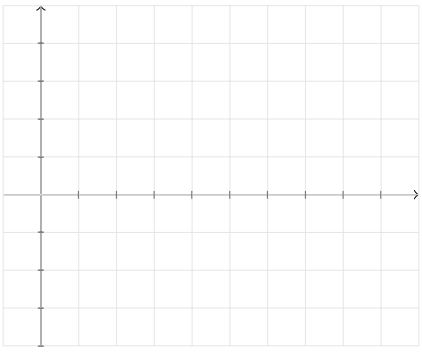
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ -M \leqslant u_n \leqslant M.$$

■

Exemple 3.10 Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée où,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

🔑 **Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



Exemple 3.11 Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée où,

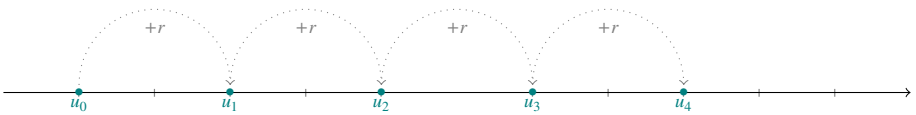
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^n - \frac{1}{2n}.$$

4 Suites remarquables

4.1 Suites arithmétiques

Définition 4.1 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si l'**écart** entre deux termes consécutifs est **constant**.

Paramètres	Relation de récurrence	Expression explicite
Premier terme : u_0 – Raison : r	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
Premier terme : u_p – Raison : r	Pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} = u_n + r$	Pour tout $n \geqslant p$, $u_n = u_p + (n-p)r$

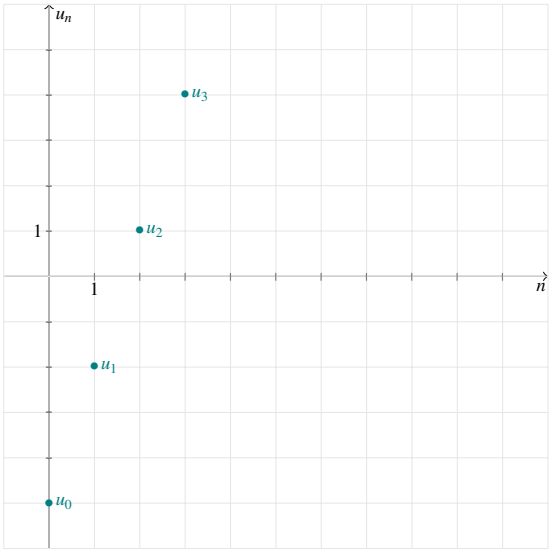


Exemple 4.2

Suite	Arithm. ?	Raison	1er terme	Terme général
$u_0 = 11$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3$				
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$				
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4n + 5$				
$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 1$				
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$				
$u_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 2, u_{n+1} = u_n + 1$				

Vérification. On n'oublie pas de vérifier que les formules explicites sont bien valables au moins pour le premier terme de la suite.

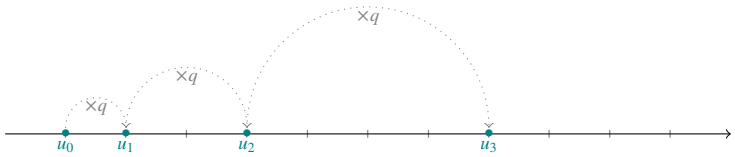
Exemple 4.3 Proposer une expression explicite de la suite représentée graphiquement ci-dessous.



4.2 Suites géométriques

Définition 4.4 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** si le **rapport** entre deux termes consécutifs est **constant**.

Paramètres	Relation de récurrence	Expression explicite
Premier terme : u_0 – Raison : q	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$
Premier terme : u_p – Raison : q	Pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} = q \times u_n$	Pour tout $n \geqslant p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$



Preuve de l'expression explicite à partir de la relation de récurrence.

Exemple 4.5

Suite	Géo. ?	Raison	1^{er} terme	Terme général
$u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n$				
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$				
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 7^n$				
$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n$				
$u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n$				

Vérification. On n'oublie pas de vérifier que les formules explicites sont bien valables au moins pour le premier terme de la suite.

4.3 Suites arithmético-géométrique

Définition 4.6 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

- Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, la suite est géométrique de raison a.

Comment déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique ?

Pour déterminer l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

1. On commence par résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\ell = a\ell + b$$
2. On pose une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_n - \ell$$
.
3. On montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q à déterminer.
4. On en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = v_0 \times q^n$$
5. On en déduit que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \ell + v_n = \ell + v_0 \times q^n$$

Exemple 4.7 Déterminer l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence, donnée par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

4.4 Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Définition 4.8 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ tels que

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n.$$

Proposition 4.9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** telle que

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n.$$

L'équation $r^2=ar+b$ est appelée **équation caractéristique** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons Δ le discriminant de cette équation. Trois cas sont alors possibles.

	Racines de l'éq. carac.	Terme général de la suite
$\Delta>0$	Deux racines réelles distinctes : r_1,r_2	Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=Ar_1^n+Br_2^n$
$\Delta=0$	Une racine réelle : r_0	Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(A+Bn)r_0^n$
$\Delta<0$	Pas de racines réelle	On ne sait pas...

Les constantes $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ sont à déterminer à partir des deux premiers termes de la suite.

Exemple 4.10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$. Montrer qu'il existe deux constantes A et B telle que,

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\qquad u_n=A\times 3^n+B\times 2^n.$$

Exemple 4.11 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $v_0 = 0$, $v_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n$.