TD 06 – Sommes & Produits

Sommes

Exercice 1 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes à l'aide des $\cdots$ (on ne demande pas de calculer ces sommes).

1) $\sum_{k=1}^{20} k^3$ 2) $\sum_{\ell=2}^{8} \exp(\ell+1)$ 3) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$ 4) $\sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1)$

1) $\sum_{k=1}^{20} k^3 = 1+2^3+3^3+\dots+20^3$

2) $\sum_{\ell=2}^{8} \exp(\ell+1) = \exp(2+1)+\exp(3+1)+\dots+\exp(8+1)$

3) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = (-1)^1+(-1)^2+\dots+(-1)^n$

4) $\sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1) = \ln(1)+\ln(2)+\dots+\ln(n)$

Exercice 2 – Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

1) $2+4+6+8+\cdots+50$
2) $1+2^6+3^6+4^6+\cdots+(n+1)^6$ (pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné)
3) $1-a+a^2-a^3+\cdots+a^{100}$ (pour un $a \in \mathbb{R}^*$ donné)

1) $2+4+6+8+\ldots+50 = 2\times1+2\times2+2\times3+2\times4+\ldots+2\times25 = \sum_{k=1}^{25} 2k$

2) $1+2^6+3^6+4^6+\ldots+(n+1)^6 = \sum_{k=1}^{n+1} k^6$

3) $1-a+a^2-a^3+\ldots+a^{100} = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k a^k$

Exercice 3 – Sommes de références. En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{i=0}^{n} 4i$

2) $\sum_{\ell=4}^{n} \frac{\ell-1}{4}$

3) $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-j}$

4) $\sum_{\ell=4}^{n+1} \frac{2^\ell}{3^{\ell-2}}$

5) $\sum_{k=2}^{n+1} 3$

6) $\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$

7) $\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{10^k}$

8) $\sum_{j=1}^{n-1} (5j+2-n)$

9) $\sum_{j=1}^{n-1} 2^j$

10) $\sum_{i=1}^{2N} i(2i+3)$

11) $\sum_{k=13}^{42} k$

12) $\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$

1) $\sum_{i=0}^{n} 4i = 4\sum_{i=0}^{n} i = 2n(n+1)$

2) $\sum_{\ell=4}^{n} \frac{\ell-1}{4} = \frac{1}{4}\left(\sum_{\ell=4}^{n}\ell - \sum_{\ell=4}^{n} 1\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\ell - 1-2-3-(n-4+1)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 6 - n + 3\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1)-2(n+3)}{2}\right)$

$= \frac{n^2+n-2n-6}{8}$

$= \frac{n^2-n-6}{8}$

3) $\sum_{j=1}^{n} e^{-j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{e}\right)^j$

$= \frac{1}{e}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{e}}$

$= \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

4) $\sum_{\ell=4}^{n+1}\frac{2^\ell}{3^{\ell-2}} = 9\sum_{\ell=4}^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^\ell$

$= 9\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-4+1}}{1-\frac{2}{3}}$

$= \frac{16}{9}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{\frac{1}{3}}$

$= \frac{16}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$

5) $\sum_{k=2}^{n+1} 3 = 3\times(n+1-2+1)$

$= 3n$

6) $\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} = x\times\sum_{k=0}^{n}(x^2)^k$

si $x\neq 1$ $= x\times\frac{1-(x^2)^{n-0+1}}{1-x^2}$

$= x\times\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$

si $x=1$ $= n-0+1$

$= n+1$

7) $\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{10^k} = 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k$

$= 3\times\left(\frac{1}{10}\right)^0\,\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{10}}$

$= 3\times\frac{10}{9}\times\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right)$

$= \frac{10}{3}\times\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)$

8) $\sum_{j=1}^{n-1}(5j+2-n)$

$= 5\times\frac{(n-1)n}{2} + (2-n)(n-1-1+1)$

$= 5\,\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)(n-2)$

$= (n-1)\left[\frac{5n}{2} - n + 2\right]$

$= \frac{n-1}{2}\left[5n-2n+4\right]$

$= \frac{(n-1)(3n+4)}{2}$

9) $\sum_{j=1}^{n-1} 2^j = 2^1\times\frac{1-2^{n-1-1+1}}{1-2}$

$= 2\times\left(2^{n-1}-1\right)$

$= 2^n - 2$

10) $\sum_{i=1}^{2N} i(2i+3) = 2\times\frac{2N(2N+1)(4N+1)}{6} + 3\,\frac{2N(2N+1)}{2}$

$= \frac{2N(2N+1)}{6}\left[2(4N+1)+9\right]$

$= \frac{N(2N+1)(8N+11)}{3}$

11) $\sum_{k=13}^{42} k = \sum_{k=1}^{42} k - \sum_{k=1}^{12} k$

$= \frac{42\times 43}{2} - \frac{12\times 13}{2}$

$= 21\times 43 - 6\times 13$

$= 903 - 78$

$= 825$

12) $\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k$

$= 5^n\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)}$

$= \frac{5}{3}\cdot\left(5^n - \frac{2^{n+1}}{5}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right)$

Exercice 4 – Sommes de références. En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

1) $2+4+6+\cdots+100$
2) $1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n$
3) $1+3+5\cdots+99$
4) $2\times 5^2+2\times 5^3+\cdots+2\times 5^{2n+2}$

1) $2+4+\dots+100 = 2\sum_{k=1}^{50} k$

$= 2\,\frac{50\times 51}{2}$

$= 2550$

2) $1-x+x^2+\dots+(-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k$

• • si $x=1$: $1\times(n-0+1) = n+1$

• • si $x\neq 1$: $\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$

3) $1+3+5+\dots+99 = \sum_{k=0}^{49}(2k+1)$

$= 2\times\frac{49\times 50}{2} + (49-0+1)$

$= 2450+50$

$= 2500$

4) $2\times 5^2+\dots+2\times 5^{2n+2} = 2\sum_{k=2}^{2n+2} 5^k$

$= 2\times 5^2\times\frac{1-5^{2n+2-2+1}}{1-5}$

$= 50\times\frac{1-5^{2n+1}}{-4}$

$= \frac{25}{2}\times(5^{2n+1}-1)$

Exercice 5 – Preuve de la somme des entiers au carré. Démontrer *par récurrence* que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On pourra s'appuyer sur la démonstration de la Proposition 1.8 faite en classe.

Exercice 6 – Somme télescopique.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$, on a
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

1) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. On a :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1 \times (x+1)}{x \times (x+1)} - \frac{1 \times x}{(x+1) \times x}$$
$$= \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{x(x+1)}$$
$$= \frac{1}{x(x+1)}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$ en utilisant la question 1

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$ par télescopage

Exercice 7 – Sommes télescopiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}$$

Indication : faire apparaître un télescopage (pour la première somme, en utilisant les propriétés algébriques du logarithme, pour la deuxième somme, en multipliant par la quantité conjuguée.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (\ln k - \ln(k+1))$

  $= -\ln(n+1)$

  par télescopage

- $S_2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}{i-(i+1)}$

  $= \sum_{i=0}^{n} (\sqrt{i+1}-\sqrt{i})$

  $= \sqrt{n+1}$

  par télescopage

Exercice 8 – Adapté de Ecricome 2023. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$p_j = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

2. En déduire que, pour tout entier $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$p_j = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

3. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n} j \times p_j = \frac{n+2}{3}$$

1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux réels à déterminer.

On a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = (a+b)k + a \iff \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On a :

$$P_j = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)}$$

$$= \frac{2j}{n} \times \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{2j}{n} \times \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$ en utilisant la question 1

$$= \frac{2j}{n} \times \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right)$$ par télescopage

$$= \frac{2\cancel{j}}{n} \times \frac{n+1-j}{\cancel{j}(n+1)}$$

$$= \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{j=1}^{n} j \times P_j = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} 2j(n+1-j)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{j=1}^{n} 2(n+1)j - \sum_{j=1}^{n} 2j^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \left(2(n+1) \sum_{j=1}^{n} j - 2 \sum_{j=1}^{n} j^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \left(2(n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}(\cancel{n+1})} \times \cancel{2}(\cancel{n+1}) \times \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} - \frac{1}{\cancel{n}(\cancel{n+1})} \times \cancel{2} \times \frac{\cancel{n}(\cancel{n+1})(2n+1)}{\cancel{6}\,3}$$

$$= n+1 - \frac{2n+1}{3}$$

$$= \frac{3(n+1) - (2n+1)}{3}$$

$$= \frac{n+2}{3}$$

Exercice 9 – Changements d'indices. À l'aide d'un changement d'indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (compléter les trous)

1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \sum_{i=\cdots}^{\cdots} \frac{i}{i-1}$ 2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{k=1}^{\cdots} \cdots$ 3) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} (i-2) = \sum_{k=\cdots}^{\cdots} k$

1) $$\sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} = \sum_{i=3}^{n+1} \frac{i}{i-1}$$

2) $$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}$$

3) $$\sum_{i=2}^{n} (i-2) = 0 + 1 + 2 + \cdots + n-2 = \sum_{k=0}^{n-2} k$$

Exercice 10 – Sommes doubles. Calculer les sommes doubles suivantes :

1) $S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} (i+j)$.

2) $V = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j$

3) $W = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x^{i+j}$ (pour un $x \in \mathbb{R}$)

1) $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (i+j)$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(i\times p + \frac{p(p+1)}{2} \right)$

$= p\times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2}\times n$

$= \frac{np}{2} [n+p+2]$

2) $V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} j$

$= \sum_{j=1}^{n} j^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Si $x=1$ alors $W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = n^2$

Si $x\neq 1$ alors

$W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^{i+j}$

$= \sum_{i=1}^{n} x^i \times \sum_{j=1}^{n} x^j$

$= x\times\frac{1-x^n}{1-x} \times x\times \frac{1-x^n}{1-x}$

$= \left(x\times \frac{1-x^n}{1-x} \right)^2$

Produit

Exercice 11 – Calculer les produits suivants. *On pourra écrire les produits en extension pour comprendre ce qui se passe.*

1) $\prod_{i=0}^{n} 2$ 2) $\prod_{k=1}^{n-1} 2^k$ 3) $\prod_{k=2}^{n} 3x$ 4) $\prod_{k=1}^{n} e^k$

1) $\prod_{i=0}^{n} 2 = \underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n-0+1 \text{ fois}}$

$= 2^{n+1}$

2) $\prod_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^1 \times 2^2 \times \ldots \times 2^{n-1}$

$= 2^{1+2+\ldots+n-1}$

$= 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$ car $1+2+\ldots+n-1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ (somme finie usuelle)

3) $\prod_{k=2}^{n} 3x = \underbrace{(3x) \times (3x) \times \ldots \times (3x)}_{n-2+1 \text{ fois}}$

$= (3x)^{n-1}$

4) $\prod_{k=1}^{n} e^k = e^1 \times e^2 \times \ldots \times e^n$

$= e^{1+2+\ldots+n}$

$= e^{n(n+1)/2}$ car $1+2+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme finie usuelle)

Exercice 12 – Calculer les produits suivants.

$$1)\ \prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k} \qquad 2)\ \prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$$

Indication : faire apparaître un télescopage.

1) $\prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k} = \frac{\cancel{14}}{13} \times \frac{\cancel{15}}{\cancel{14}} \times \frac{\cancel{16}}{\cancel{15}} \times \cdots \times \frac{\cancel{56}}{\cancel{55}} \times \frac{57}{\cancel{56}}$

$= \frac{57}{13}$ par télescopage

2) $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \frac{\cancel{n-1}}{n}$

$= \frac{1}{n}$ par télescopage

Factorielle

Exercice 13 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

1) $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$,

2) $n(n-1)(n-2)$

3) $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$

4) $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$

1) $5 \times 6 \times \ldots \times 9 = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$

$= \dfrac{9!}{4!}$

3) $2 \times 4 \times \ldots \times (2n) = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times \ldots \times (2 \times n)$

$= 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 1 \times 2 \times \ldots \times n$

$= 2^n \times n!$

2) $n(n-1)(n-2) = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-3) \times (n-2)(n-1)n}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-3)}$

$= \dfrac{n!}{(n-3)!}$

4) $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1) = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (2n) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}$

$= \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

en utilisant le résultat de la question 4

Exercice 14 – Simplifier au maximum les quantités suivantes :

1) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$ 2) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ 3) $(n+1)!+(n-1)!$

1) $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\dots\times\cancel{(n-1)}\times\cancel{n}}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\dots\times\cancel{(n-1)}\times\cancel{n}\times(n+1)}$

$= \dfrac{1}{n+1}$

2) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \dfrac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\dots\times\cancel{(2n-1)}\times 2n\times(2n+1)}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\dots\times\cancel{(2n-1)}}$

$= 2n\times(2n+1)$

3) $(n+1)!+(n-1)! = (n-1)!\,\big((n+1)n+1\big)$

$= (n-1)!\,(n^2+n+1)$

Exercice 15 – Écrire les produits suivants grâce à une/plusieurs factorielle(s).

1) $\prod_{j=1}^{n-1} j^2$ 2) $\prod_{k=4}^{n} k^3$

1) $\prod_{j=1}^{n-1} j^2 = 1^2 \times 2^2 \times \dots \times (n-1)^2$

$= [1 \times 2 \times \dots \times (n-1)]^2$

$= [(n-1)!]^2$

2) $\prod_{k=4}^{n} k^3 = 4^3 \times 5^3 \times \dots \times n^3$

$= (4 \times 5 \times \dots \times n)^3$

$= \left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times n}{1 \times 2 \times 3}\right)^3$

$= \left[\frac{n!}{3!}\right]^3$