

D 06 – SOMMES & PRODUITS (BIS) - CORRECTIO

Exercice 1 – Somme d'une constante. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

$$1) \sum_{k=1}^{10} 3 = 3 \times (10 - 1 + 1) = 3 \times 10 = 30$$

$$2) \sum_{\ell=0}^{21} 5 = 5 \times (21 - 0 + 1) = 5 \times 22 = 110$$

$$3) \sum_{i=1}^n 1 = 1 \times (n - 1 + 1) = n$$

$$4) \sum_{j=n}^{n+10} 1 = 1 \times (n + 10 - n + 1) = 11$$

$$5) \sum_{k=p}^q (-1) = (-1) \times (q - p + 1) = p - q - 1$$

$$6) \sum_{k=1}^n x = x \times (n - 1 + 1) = nx$$

Exercice 2 – Somme des entiers et des entiers au carré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$1) \sum_{k=1}^6 k = \frac{6 \times 7}{2} = 3 \times 7 = 21$$

$$2) \sum_{k=0}^6 k = \frac{6 \times 7}{2} = 3 \times 7 = 21$$

$$3) \sum_{\ell=1}^{10} \ell^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 5 \times 11 \times 7 = 385$$

$$4) \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$5) \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$6) \sum_{k=1}^{n^2} k^2 = \frac{n^2 \times (n^2 + 1) \times (2n^2 + 1)}{6}$$

Exercice 3 – Somme des entiers et des entiers au carré mais il manque des termes.... Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 5$. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$. Calculer les sommes suivantes.

$$1) \sum_{k=3}^{12} k = \sum_{k=1}^{12} k - 1 - 2 = \frac{12 \times 13}{2} - 3 = 6 \times 13 - 3 = 75$$

$$2) \sum_{k=5}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^4 k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 30$$

$$3) \sum_{j=100}^{200} j = \sum_{j=1}^{200} j - \sum_{j=1}^{99} j = \frac{200 \times 201}{2} - \frac{99 \times 100}{2} = 100 \times 201 - 99 \times 50 = 20100 - 4950 = 15150$$

$$4) \sum_{k=p}^q k = \sum_{k=1}^q k - \sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{q \times (q+1)}{2} - \frac{(p-1) \times p}{2}$$

Exercice 4 – Somme des entiers et des entiers au carré, enfin presque !. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

- 1) $\sum_{k=1}^n (5k) = 5 \sum_{k=1}^n k = 5 \times \frac{n(n+1)}{2}$
- 2) $\sum_{k=0}^n (k-10) = \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 10 = \frac{n(n+1)}{2} - 10(n+1)$
- 3) $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^{n+1} k + \sum_{k=0}^{n+1} 1 = 2 \times \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n+2$
- 4) $\sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k+1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right)$
- 5) $\sum_{k=5}^{n+1} (-k+1) = - \sum_{k=5}^{n+1} k + \sum_{k=5}^{n+1} 1 = - \left(\sum_{k=1}^{n+1} k - 1 - 2 - 3 - 4 \right) + (n+1 - 5 + 1) = - \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 10 + n - 3$

Exercice 5 – Sommes géométriques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

- 1) $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^0 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$
- 2) $\sum_{k=1}^n 4^k = 4^1 \times \frac{1-4^{n+1}}{1-4} = -\frac{4}{3} \times (1-4^{n+1})$
- 3) $\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-2+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$
- 4) $\sum_{k=0}^n 1^k = \sum_{k=0}^n 1 = 1 \times (n-0+1) = n+1$

Exercice 6 – Sommes géométriques un peu cachée.... Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les règles suivantes sur les puissances, pour tout $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*, (p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$x^{p+q} = x^p \times y^q \quad x^{-p} = \frac{1}{x^p} \quad \frac{1}{y^k} = \left(\frac{1}{y}\right)^k \quad \frac{x^k}{y^k} = \left(\frac{x}{y}\right)^k \quad x^{p \times k} = (x^p)^k$$

calculer les sommes suivantes.

- 1) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$
- 2) $\sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10+1}}{1-\frac{2}{3}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$
- 3) $\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k+3} = \sum_{k=2}^{n+1} 2^k \times 2^3 = 2^3 \sum_{k=2}^{n+1} 2^k = 8 \times 2^2 \times \frac{1-2^{n+1-2+1}}{1-2} = 32 \times (2^n - 1)$
- 4) $\sum_{k=1}^n 2^{2k} = \sum_{k=1}^n (2^2)^k = \sum_{k=1}^n 4^k = 4^1 \times \frac{1-4^{n+1}}{1-4} = -\frac{4}{3} (1-4^{n+1})$
- 5) $\sum_{k=1}^n 3^k \times 5^{-k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{3}{5} \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$