TD 07 – SUITES (II)

Exercice 1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 2u_n - 5.$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme suivante,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exercice 2 – Étude grâce à une suite auxiliaire. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{u_n}{3^n}.$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire le terme générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme suivante

   $$\sum_{k=0}^{n} u_k$$

Exercice 3 – Suites imbriquées. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par, $a_0 = 2, b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = 2a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = a_n + 2b_n.$$

On cherche à déterminer le terme générale des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de deux manières différentes.

1. Calculer a_1, b_1, a_2, b_2.
2. Première méthode.
   (a) Déterminer la nature de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = a_n + b_n$.
   (b) Déterminer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = a_n - b_n$.
   (c) Conclure.
3. Deuxième méthode.
   (a) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (b) Conclure.

Exercice 4 – Soit a une constante réelle. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - au_n + a = 0$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de a, u_0 et n.

Exercice 5 – Suite récurrence linéaire d'ordre 3.

1. On considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n.$$

   Montrer l'équivalence suivante

   $$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ géométrique de raison } q \qquad \Leftrightarrow \qquad q \in \{-1, 1, 2\}.$$

2. Soient a, b, c des nombres réels. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + b(-1)^n + c2^n.$$

   (a) Montrer qu'alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

   (b) Déterminer les valeurs de a, b et c de sorte que

   $$u_0 = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = 1.$$

Exercice 6 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont tous les termes sont strictement positifs. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de la somme suivante.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{u_{k-1}} + \sqrt{u_k}}$$

Exercice 7 – Calculer la somme

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{1024}.$$

Exercice 8 – Question ouverte. Déterminer les suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques.

Exercice 9 – Question ouverte. Déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 6$$

On pourra commencer par trouver une suite particulière $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solution du problème.

Exercice 10 – Démo pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0 et de u_1 et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Notons Δ le discriminant de l'équation $x^2 - ax - b = 0$ et supposons que $\Delta \geqslant 0$. Notons également x_1 et x_2 les deux solutions (éventuellement égales) de cette équation.

1. Exprimer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 en fonction de a et b.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{n+1} - x_1u_n.$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire son terme général.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme suivante,

   $$\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}(u_{k+1} - x_1u_k).$$

4. En déduire le terme générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en distinguant les cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$.