

## TD 07 – SUITES

**Exercice 1 – Récurrences en vrac.** Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 11$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 5u_n$ . Montrer par récurrence que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 11 \times 5^n$$

2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $v_0 = 4$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = \frac{6}{10}v_n + 2$ . Montrer par récurrence que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 3 < v_n < 5$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ . Montrer par récurrence que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Exercice 2 – Calcul des termes d'une suite.** Dans chaque cas, donner les quatre premiers termes des suites suivantes.

1. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$

2. On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + 2^n.$$

3. On définit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$w_0 = 1, \quad w_1 = -2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_n - w_{n+1}.$$

**Exercice 3 – Monotonie d'une suite.** Étudier le sens de variation des suites de termes généraux suivants, définis pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par,

$$1) u_n = 5 - 3^n \quad (\text{Méthode 1}) \qquad 3) u_n = \frac{n-1}{n+2} \quad (\text{Méthode 1})$$

$$2) u_n = n - n^2 \quad (\text{Méthode 1}) \qquad 4) u_n = \frac{2^n}{n} \quad (\text{Méthode 2})$$

**Exercice 4 – Monotonie d'une suite.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \exp(-x) - 1$  et on considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = f(n)$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5 – Suites bornées.** Étudier le caractère borné des suites suivantes (on pourra représenter graphiquement les premiers termes de la suite pour conjecturer le caractère majoré/minoré/borné de la suite).

$$1) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n, \qquad 2) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{2^n},$$

$$3) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, w_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad 4) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, z_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$$

**Exercice 6 – Suites arithmétiques.** Pour chacune des suites, déterminer la valeur de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$1) \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} u_0 = -\frac{1}{5} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Exercice 7 – Suites géométriques.** Pour chacune des suites, déterminer la valeur de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

- 1)  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 7u_n \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{11}u_n \end{cases}$

**Exercice 8 – Suites arithmético-géométriques.** Pour chacune des suites, déterminer la valeur de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

- 1)  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{4} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$

**Exercice 9 – Suites récurrences linéaires d'ordre 2.** Pour chacune des suites, déterminer la valeur de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

- 1)  $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 9 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

**Exercice 10 –** On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $u_0 = 1, v_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite  $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante. Préciser sa valeur.
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique.
3. Déterminer les termes généraux des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 11 –** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n$  existe et  $0 \leq u_n \leq 2$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante grâce à un raisonnement par récurrence.

**Exercice 12 – Extrait Ecricome 2018.**

1. On note

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- (a) Montrer que  $\varphi > 1$ .
- (b) Montrer que les réels  $\varphi$  et  $-\frac{1}{\varphi}$  sont les solutions de l'équation suivante

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

2. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par,  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Justifier qu'il existe des réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\varphi^n + B\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$