

Étude d'une suite numérique

- 1 Notion de suite
- 2 Démonstration par récurrence
- 3 Étude qualitative d'une suite
- 4 Suites remarquables

1 Notion de suite

Définition 1.1 Une suite de réels est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est noté u_n , et est appelé terme général de la suite.
- La suite est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

! Certaines suites ne sont pas définies sur tout \mathbb{N} . De manière générale, si une suite n'est définie qu'à partir du rang n_0 , on note $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Terme général	Premier terme licite	Notation de la suite
$\frac{1}{n}$	Pour $n = 1$	$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ ou $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
$\sqrt{n-2}$	Pour $n = 2$	$\left(\sqrt{n-2}\right)_{n \geq 2}$
$\ln(n)$	Pour $n = 1$	$(\ln(n))_{n \geq 1}$ ou $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$
$\frac{1}{n^2+1}$	Pour $n = 0$	$\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n \geq 0}$ ou $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

1.1 Modes de définition d'une suite

On peut définir une suite de plusieurs façons.

- De manière **explicite** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est directement exprimé en fonction de n . Ainsi, tous les termes de la suite se calculent de manière directe.
- Par **récurrence** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est exprimé en fonction d'un ou plusieurs termes précédents u_0, u_1, \dots, u_{n-1} .
- De manière **implicite** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n vérifie une certaine propriété donnée dépendant de n . Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution dans \mathbb{R} de l'équation $x^3 + x - 1 = n$. Dans ce cas, on a rarement accès aux valeurs de la suite. *Ce type de suites sera étudié dans un autre chapitre.*

Exemple 1.2

Définition	Explicite/Récurrence	Calcul de termes		
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$	Explicite	$u_1 = 1$	$u_2 = \frac{1}{2}$	$u_{10} = \frac{1}{10}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 1$	Explicite	$u_0 = -1$	$u_1 = 0$	$u_{10} = 99$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)^n + 2$	Explicite	$v_0 = 3$	$v_1 = 1$	$v_{12} = 3$
$u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$	Récurrence	$u_0 = \text{xx}$	$u_1 = 1$	$u_2 = 5$
$w_0 = 0$, $w_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$	Récurrence	$w_0 = 0$	$w_1 = 1$	$w_2 = 1$

1.2 Représentation graphique

Pour étudier une suite, et en particulier étudier son comportement “à l’infini”, on peut la représenter graphiquement pour essayer de “voir” ce qu’il se passe.

Pour les suites définies de manière explicite.

On peut représenter graphiquement une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de manière explicite de deux manières différentes.

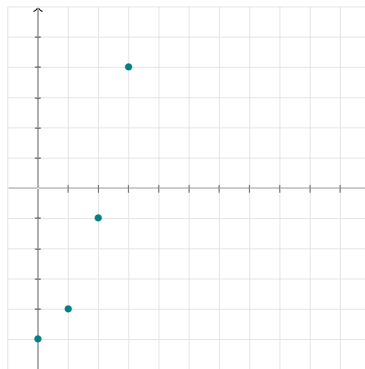
- On peut placer **dans le plan** les points de coordonnées (n, u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.
- On peut aussi représenter la suite comme un ensemble de valeurs **le long d’un axe**.

Exemple 1.3 Représentons graphiquement, des deux manières différentes, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 5$.

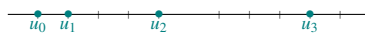
Pour s’aider, on peut calculer les premiers termes de la suite

$$u_0 = -5, \quad u_1 = -4, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 4, \quad \dots$$

- Dans un premier temps, on peut placer dans le plan les points (n, u_n) .



- Dans un second temps, on peut placer les valeurs de la suite le long d’un axe.



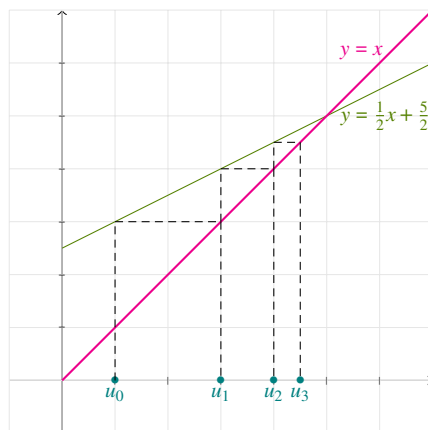
Pour les suites définies de manière implicite.

Pour représenter graphiquement, dans le plan, une suite définie par récurrence, on peut

- calculer les premiers termes de la suite à la main et les placer sur le graphique,
- soit construire directement sa représentation graphique à l’aide de la droite $y = x$.

Exemple 1.4 Représentons graphiquement, sans calculer les premiers termes, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{2}.$$



On peut vérifier à la main les premières valeurs

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = \frac{9}{2}, \quad \dots$$

2 Démonstration par récurrence

? Pour prouver un résultat par **récurrence**, on utilise la rédaction suivante.

Notons, pour tout $n \geq n_0$, par $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante

$$\mathcal{P}(n) : \ll \dots \dots \dots \gg$$

- **Initialisation** : Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

Insérer raisonnement mathématique

Donc $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$.

Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Insérer raisonnement mathématique

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 2.1 On cherche à montrer l'énoncé suivant.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 7 \times 3^n$.

La rédaction de la récurrence.

On prouve le résultat par **récurrence**. Notons, pour tout $n \geq 0$, par $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante

$$\mathcal{P}(n) : \ll u_n = 7 \times 3^n \gg$$

- **Initialisation** : Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on cherche à montrer que

$$u_0 = 7 \times 3^0.$$

D'une part, par hypothèse $u_0 = 7$.

D'autre part, on a $7 \times 3^0 = 7 \times 1 = 7$.

Donc, $u_0 = 7 \times 3^0$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité** :

On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 0$, c'est-à-dire que l'on suppose que

$$u_n = 7 \times 3^n$$

Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} = 7 \times 3^{n+1}$$

Le geste invisible nécessaire pour l'hérédité.

Comprendre le lien entre $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n)$. Ici, il s'agit de remarquer que

$$u_{n+1} = 3u_n$$

Par hypothèse de l'énoncé, on sait que $u_{n+1} = 3u_n$.

Or, par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 7 \times 3^n$.

Donc, $u_{n+1} = 3 \times 7 \times 3^n = 7 \times 3 \times 3^n = 7 \times 3^{n+1}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \geq 1$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3 Étude qualitative d'une suite

3.1 Variation d'une suite

Définition 3.1 — Suite constante & Suite stationnaire. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **constante** si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Dans ce cas, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = C$.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang :

$$\text{il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Exemple 3.2 Étudions la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = |u_n^2 - 2| \end{cases}$$

 **Gestes Invisibles/Automatismes.**

- Pour avoir une idée du comportement de la suite, on peut calculer ses premiers termes

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 2, \quad \dots$$

On conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2$.

- On souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel. On pense au raisonnement par récurrence.

Montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \quad u_n = 2 \quad \gg$$

- Initialisation. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$u_0 = 2$$


D'après l'énoncé, on sait que $u_0 = 2$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on sait que

$$u_n = 2$$

Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$u_{n+1} = 2$$

 **Gestes Invisibles/Automatismes.** Pour faire marcher l'hérédité, il faut comprendre le lien entre $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire ici le lien entre u_n et u_{n+1} . On remarque alors que l'énoncé nous indique que $u_{n+1} = |u_n^2 - 2|$.

D'après l'énoncé, on sait que $u_{n+1} = |u_n^2 - 2|$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on sait aussi que $u_n = 2$.

Donc $u_{n+1} = |2^2 - 2| = |2| = 2$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Définition 3.3 — Monotonie d'une suite. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** si

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** si

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que la suite est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Comment étudier les variations d'une suite ?

Pour étudier la monotonie, on dispose de plusieurs méthodes.

► **Méthode 1 - Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \iff (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

► **Méthode 2 -** Si on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \iff$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \iff (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

► **Méthode 3 -** Passer par l'étude d'une fonction. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de f pour en déduire celle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

► **Méthode 4 -** On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Exemple 3.4 Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par,

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n}{n+1}$

b) $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n^2 + v_n + 2$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{5^n}$

 **Gestes Invisibles/Automatismes.**

- Pour conjecturer la monotonie d'une suite, on peut calculer ses premiers termes. Par exemple, on sait que

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{2}{3}, \quad \dots$$

On peut donc conjecturer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- On doit étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

a) En utilisant la définition explicite de la suite, on obtient directement que,


$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b) En utilisant la relation de récurrence, on obtient directement que,

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = v_n^2 + 2 > 0$$

Donc, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Faisons maintenant la troisième suite avec deux méthodes différentes.  **Gestes Invisibles/Automatismes.** On doit étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). On a directement que,

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5^n} \left(\frac{1}{5} - 1 \right) = -\frac{4}{5} \times \frac{1}{5^n} < 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

🔑 Gestes Invisibles/Automatismes. Lorsqu'une suite est définie comme un quotient, pour étudier sa monotonie, on peut comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 (pour tout $n \in \mathbb{N}$). **On a directement que,**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} < 1$$

On retrouve donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exemple 3.5 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(n)$.

🔑 Gestes Invisibles/Automatismes. On doit étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). **On a directement que,**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \exp(n+1) - \exp(n) = \exp(n)(\exp(1) - 1) > 0$$

(on rappelle que $\exp(1) = e \approx 2.7$.) Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

🔑 Gestes Invisibles/Automatismes. Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut aussi comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 (pour tout $n \in \mathbb{N}$). **On a directement que,**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = \exp(1) > 1$$

On retrouve donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

🔑 Gestes Invisibles/Automatismes. Pour étudier la monotonie d'une suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on peut aussi se ramener à étudier la monotonie de la fonction f . **On peut commencer par remarque que**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = f(n) \quad \text{où} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(x).$$

Or, on sait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} . Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n < n+1 \quad \text{donc} \quad f(n) < f(n+1) \quad \text{c-à-d} \quad u_n < u_{n+1}$$

On retrouve donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3.2 Suites majorées/minorées/bornées

Définition 3.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

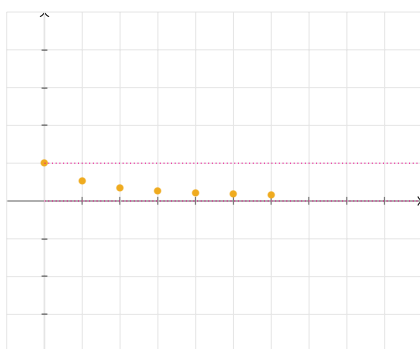
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple 3.7 Déterminer si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ est majorée/minorée/bornée.

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



On conjecture que la suite est majorée par 1, minorée par 0 et donc bornée.

On cherche à montrer que

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1 \geq 0$ et que $n \geq 0$, par quotient de deux nombres positifs, on obtient que $u_n = \frac{1}{n} \geq 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n \geq 1$. Or la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}_+^* donc, $\frac{1}{n} \leq 1$, c'est-à-dire $u_n \leq 1$.

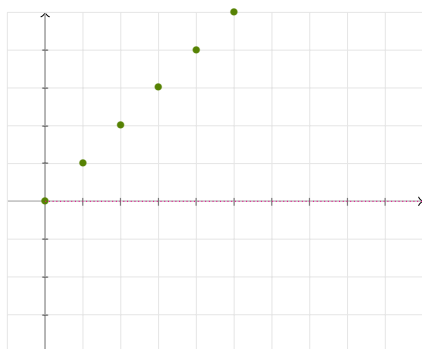
On a donc montré que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exemple 3.8 Déterminer si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ est majorée/minorée/bornée.

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



On conjecture que la suite n'est pas majorée, est minorée par 0, et donc n'est pas bornée.

On cherche à montrer que

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 0,$$

et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n \geq 0$, on obtient directement que $u_n = n \geq 0$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
 - Car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (les valeurs de la suite augmentent indéfiniment).
 - On peut aussi montrer ce résultat grâce à un raisonnement par l'absurde. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée. Alors, il existe un réel M tel que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

En prenant $n = \lfloor M \rfloor + 1$ dans l'inégalité précédente, on obtient,

$$\lfloor M \rfloor + 1 \leq M$$

Ce qui est absurde. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Proposition 3.9 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $M \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par M si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par M .

Démonstration. Cette proposition provient de l'équivalence suivante,

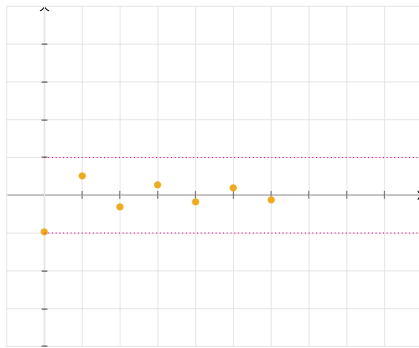
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M \quad \Leftrightarrow \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M.$$

■

Exemple 3.10 Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée où,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour conjecturer la bornitude d'une suite (ou non), on peut la représenter graphiquement pour avoir une idée de son comportement.



On conjecture que la suite est majorée par 1, minorée par -1 et donc bornée.

Exemple 3.11 Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée où,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^n - \frac{1}{2n}.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour montrer le caractère borné d'une suite, on majore la valeur absolue de la suite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$|u_n| = \left| (-1)^n - \frac{1}{2n} \right| \leq |(-1)^n| + \left| \frac{1}{2n} \right| = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geq 2$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* , on a

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On cherche à montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad -1 \leq u_n \leq 1.$$

De manière équivalente, on cherche donc à montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Or $n \geq 1$, donc, par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* ,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq 1.$$

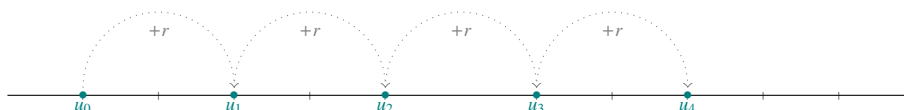
Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

4 Suites remarquables

4.1 Suites arithmétiques

Définition 4.1 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si l'écart entre deux termes consécutifs est constant.

Paramètres	Relation de récurrence	Expression explicite
Premier terme : u_0 – Raison : r	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
Premier terme : u_p – Raison : r	Pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n + r$	Pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p + (n - p)r$

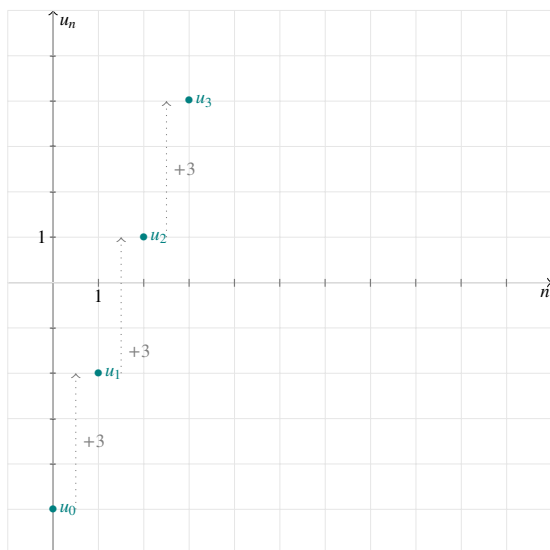


Exemple 4.2

Suite	Arithm. ?	Raison	1 ^{er} terme	Terme général
$u_0 = 11$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$	Oui	3	$u_0 = 11$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 11$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$	Non			
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n + 5$	Oui	4	$u_1 = 5$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n + 5$
$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1$	Oui	-1	$u_0 = 1$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n + 1$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$	Oui	1	$u_0 = 0$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$
$u_2 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} = u_n + 1$	Oui	1	$u_2 = 1$	Pour tout $n \geq 2$, $u_n = n - 1$

✚ Vérification. On n'oublie pas de vérifier que les formules explicites sont bien valables au moins pour le premier terme de la suite.

Exemple 4.3 Proposer une expression explicite de la suite représentée graphiquement ci-dessous.



L'écart entre les différentes termes de la suite semble constant égal à 3. La suite semble donc être une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 3. On peut donc conjecturer que son terme général est donné par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -5 + 3n$$

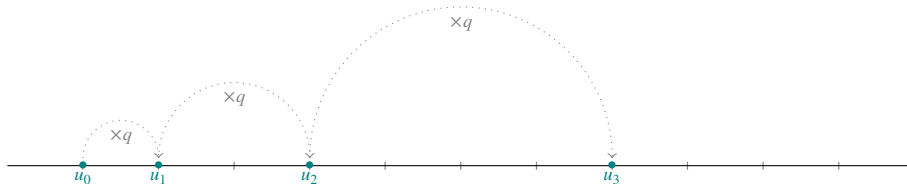
✚ Vérification. On vérifie que cette formule est en adéquation avec les premiers termes de la suite.

$$\begin{array}{lcl} n = 0 & \rightsquigarrow & u_0 = -5 \quad \checkmark \\ n = 1 & \rightsquigarrow & u_1 = -2 \quad \checkmark \\ n = 2 & \rightsquigarrow & u_2 = 1 \quad \checkmark \end{array}$$

4.2 Suites géométriques

Définition 4.4 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **géométrique** si le **rapport** entre deux termes consécutifs est **constant**.

Paramètres	Relation de récurrence	Expression explicite
Premier terme : u_0 – Raison : q	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$
Premier terme : u_p – Raison : q	Pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} = q \times u_n$	Pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$



Preuve de l'expression explicite à partir de la relation de récurrence. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence suivante,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$. **Gestes Invisibles/Automatismes.** On souhaite montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel. On pense au raisonnement par récurrence.

Montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll u_n = u_0 \times q^n \gg$$

- **Initialisation.** Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $u_0 = u_0 \times q^0$.

Par convention, $q^0 = 1$. Donc $u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$.

Donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, on suppose que

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour faire marcher l'hérédité, il faut comprendre le lien entre $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire ici le lien entre u_n et u_{n+1} . On remarque alors que l'énoncé nous indique que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = u_0 \times q^n$.

Or, d'après l'énoncé, $u_{n+1} = q \times u_n$.

En combinant ces deux informations, on obtient que $u_{n+1} = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$.

Donc, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Par principe de récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. ■

Exemple 4.5

Suite	Géo. ?	Raison	1 ^{er} terme	Terme général
$u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n$	Oui	5	$u_0 = 7$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 5^n$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$	Non			
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 7^n$	Oui	7	$u_0 = 3$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 7^n$
$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n$	Oui	-1	$u_0 = 1$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$
$u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n$	Oui	-1	$u_1 = 2$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

✚ Vérification. On n'oublie pas de vérifier que les formules explicites sont bien valables au moins pour le premier terme de la suite.

4.3 Suites arithmético-géométrique

Définition 4.6 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$


- Si $a = 1$, la suite est **arithmétique de raison b** .
- Si $b = 0$, la suite est **géométrique de raison a** .

Comment déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique ?

Pour déterminer l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

1. On commence par résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ell = a\ell + b$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$.
3. On montre que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q à déterminer.
4. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$.
5. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ell + v_n = \ell + v_0 \times q^n$.

Exemple 4.7 Déterminons l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence, donnée par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a

$$\ell = 3\ell - 4 \iff 4 = 2\ell \iff \ell = 2$$

2. Posons

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 2.$$

3. Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3.

4. On en déduit que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times 3^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}.$$

5. On en déduit que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + 2 = 3^{n+1} + 2.$$

✚ Vérification. On vérifie que la formule est en adéquation, au moins avec le premier terme de la suite. En effet, la formule donne

$$u_0 = 3^{0+1} + 2 = 5 \quad \checkmark$$

4.4 Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Définition 4.8 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Proposition 4.9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'équation $r^2 = ar + b$ est appelée **équation caractéristique** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons Δ le discriminant de cette équation. Trois cas sont alors possibles.

	Racines de l'éq. carac.	Terme général de la suite
$\Delta > 0$	Deux racines réelles distinctes : r_1, r_2	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$
$\Delta = 0$	Une racine réelle : r_0	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (A + Bn)r_0^n$
$\Delta < 0$	Pas de racines réelle	On ne sait pas...

Les constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer à partir des deux premiers termes de la suite.

Exemple 4.10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer qu'il existe deux constantes A et B telle que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \times 3^n + B \times 2^n.$$

 **Gestes Invisibles/Automatismes.** On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Pour obtenir des informations sur le terme général de cette suite, on étudie l'équation caractéristique.

- L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est donnée par


$$r^2 = 5r - 6 \quad \text{c-à-d} \quad r^2 - 5r + 6 = 0$$

- On reconnaît une équation du second degré dont le discriminant est donné par $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$. Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines qui sont données par

$$r_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2} = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2} = 2$$

- Donc, il existe deux constantes A et B telles que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \times 3^n + B \times 2^n.$$

 **Vérification.** Comme on ne connaît pas les valeurs des constantes A et B , on ne peut pas vérifier si la formule est en adéquation avec les premières valeurs de la suite.

Exemple 4.11 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, $v_0 = 0$, $v_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n$.

 **Gestes Invisibles/Automatismes.** On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Pour obtenir des informations sur le terme général de cette suite, on étudie l'équation caractéristique.

- L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est donnée par

$$r^2 = 6r - 9 \quad \text{c-à-d} \quad r^2 - 6r + 9 = 0$$

- On reconnaît une équation du second degré dont le discriminant est donné par $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$. Comme $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une unique racine qui est donnée par

$$r_0 = \frac{-(-6)}{2} = 3$$

- Donc, on en déduit qu'il existe deux constantes A et B telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (A + Bn) \times 3^n.$$

- On détermine enfin les valeurs des deux constantes A et B grâce aux deux premiers termes de la suite. En effet, les deux constantes A et B doivent vérifier le système suivant, que l'on résout ensuite, grâce à la méthode du pivot de Gauss (ou par substitution),

$$\begin{cases} (A + 0 \times B) \times 3^0 = 0 \\ (A + 1 \times B) \times 3^1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

- Conclusion. On en déduit que le terme général de la suite est donné par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{n}{3} \times 3^n$$

 **Vérification.** On vérifie que la formule est en adéquation, au moins avec le premier terme de la suite (voir le deuxième). En effet, la formule donne

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 && \checkmark \\ v_1 &= -\frac{1}{3} \times 3 = -1 && \checkmark \end{aligned}$$