6 Sommes et Produits

1 Sommes

1.1 Le symbole $\sum$

On souhaite avoir une *écriture simplifiée* et *compacte* d'opérations comme la *somme* des 50 premiers entiers naturels :

$$1+2+3+4+\cdots+50,$$

ou comme le calcul du *cumul* des $n+1$ premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n.$$

Définition 1.1 Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$ (p est l'indice de départ de la somme, q l'indice de fin). Soient $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_q$ des nombres réels. La *somme* de tous les termes $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_q$ se note :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

Cette notation se lit «la *somme* des u_k pour k variant de p à q». Par convention, si $p > q$ (somme vide), on considère que la somme est nulle.

! L'*indice de sommation* est une *lettre muette* :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \sum_{n=p}^{q} u_n = \sum_{\square=p}^{q} u_\square = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

! On peut aussi rencontrer la notation

$$\sum_{i\in I} u_i$$

Cela désigne la sommes des éléments u_i, pour lesquels l'indice i appartient à I. Par exemple,

$$\sum_{i\in\{1,4,9\}} \sqrt{i} = \sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9}.$$

Exemple 1.2 — De l'expression développée au symbole $\sum$. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

$$1^2+2^2+\cdots+14^2+15^2 = \sum_{k=1}^{15} k^2$$

$$3+4+5+\cdots+n = \sum_{k=3}^{n} k$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{100} = \sum_{j=0}^{100} 2^j$$

$$1+\exp(1)+\exp(2)+\cdots+\exp(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \exp(k)$$

$$2+4+6+\cdots+2n = \sum_{k=1}^{n} 2k$$

Exemple 1.3 — Du symbole $\sum$ à l'expression développée.

$\sum$	Terme général	Indice 1^er^ terme	Indice der. terme	Somme avec les $\cdots$
$\sum_{k=1}^{4} k^2$	k^2	$k=1$	$k=4$	$1+2^2+3^2+4^2$
$\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{1+i}$	$\frac{1}{1+i}$	$i=0$	$i=3$	$\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}$
$\sum_{j=1}^{n} \frac{10}{1+j^2}$	$\frac{10}{1+j^2}$	$j=1$	$j=n$	$\frac{10}{1+1^2}+\frac{10}{1+2^2}+\cdots\frac{10}{1+n^2}$
$\sum_{\ell=2}^{2} \exp(\ell)$	$\exp(\ell)$	$\ell=2$	$\ell=2$	$\exp(2)$
$\sum_{k=1}^{3} a_{2k+1}$	a_{2k+1}	$k=1$	$k=3$	$a_3+a_5+a_7$

1.2 Les sommes de référence

Proposition 1.4 Dans la somme $\sum_{k=p}^{q} u_k$, il y a $q-p+1$ termes.

Proposition 1.5 — Somme d'une constante. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$ et $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=p}^{q} a = a \times (\text{Nombre de termes}) = a \times (q-p+1).$$

Exemple 1.6 — Somme d'une constante.

$$\sum_{k=1}^{4} 2 = 2\times(4-1+1) = 2\times 4 = 8$$

$$\sum_{i=0}^{3} (-1) = (-1)\times(3-0+1) = (-1)\times 4 = -4$$

$$\sum_{j=1}^{n} 0 = 0\times(n-1+1) = 0\times n = 0$$

Proposition 1.7 — Sommes des entiers et des entiers au carré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vérification. On peut au moins vérifier que ces formules ont un sens pour $n=1$ (voir pour $n=2$). Par exemple, pour $n=1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1 \qquad \checkmark$$

De même, pour $n=2$, on obtient,

$$\sum_{k=1}^{2} k = 1+2 = 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{2(2+1)}{2} = 3 \qquad \checkmark$$

Exemple 1.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} k &= \tfrac{6\times 7}{2} = 3\times 7 = 21 \\
\sum_{i=0}^{5} i^2 &= \tfrac{5\times 6\times(2\times 5+1)}{6} = 5\times 11 = 55 \\
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 1.9 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Calculer la somme suivante.

$$\sum_{k=2}^{n} k$$

En ajoutant/retranchant le terme qui manque, on obtient directement

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k &= 2 + \cdots + n \\
&= 1 + 2 + \cdots + n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k - 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - 1
\end{aligned}$$

Vérification. On peut au moins vérifier que cette formule a un sens pour $n = 2$. En effet, pour $n = 2$, on obtient

$$\sum_{k=2}^{2} k = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{2(2+1)}{2} - 1 = 3 - 1 = 2 \qquad \checkmark$$

Proposition 1.10 — Sommes géométriques. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 1$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = x^p \times \frac{1 - x^{q-p+1}}{1-x}$$

- Pour $x = 1$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \sum_{k=p}^{q} 1 = (q - p + 1).$$

Exemple 1.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes géométriques suivantes.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{10} 5^k &= \tfrac{1-5^{10-0+1}}{1-5} = -\tfrac{1}{4}\left(1 - 5^{11}\right) \\
\sum_{k=10}^{20} 2^k &= 2^{10} \times \tfrac{1-2^{20-10+1}}{1-2} = 2^{10} \times \tfrac{1-2^{11}}{-1} = 2^{21} - 2^{10} \\
\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \tfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) && \text{(n=0)} \checkmark \\
\sum_{k=1}^{n} \tfrac{3^k}{4^k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{3}{4}\right)^k = \tfrac{3}{4}\tfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{3}{4}} = 3\left(1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n}\right) && (n = 1) \checkmark \\
\text{Si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1, \quad \sum_{i=0}^{n} x^{2i} &= \sum_{i=0}^{n} (x^2)^i = \tfrac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} = \tfrac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2} && (n = 0) \checkmark
\end{aligned}$$

1.3 Techniques de calculs

1.3.a) Se ramener aux sommes de référence

Pour calculer des sommes, on peut se ramener aux sommes de référence en utilisant la linéarité de la somme, et en faisant attention aux indices.

Proposition 1.12 — Linéarité de la somme. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Soient $u_p, \dots, u_q$ et $v_p, \dots, v_q$ des nombres réels. On a

$$\sum_{k=p}^{q} (u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=p}^{q} v_k$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} (\lambda \cdot u_k) = \lambda \cdot \sum_{k=p}^{q} u_k$$

Attention, la somme ne comporte mal avec la multiplication/division et les puissances. Par exemple, si $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^p \neq \sum_{k=0}^{n} u_k^p$$

Par exemple, on sait que $(u_1 + u_2)^2 \neq u_1^2 + u_2^2$.

Exemple 1.13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $S_n = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1)$.

En utilisant la linéarité de la somme et les sommes de référence, on obtient,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} (6k^2) + \sum_{k=1}^{n} (4k) + \sum_{k=1}^{n} (1) \\
&= 6 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n - 1 + 1) \\
&= n\left((n+1)(2n+1+2(n+1)+1\right) \\
&= n(2n^2 + 5n + 4)
\end{aligned}$$

Vérification. On peut au moins vérifier que cette formule a un sens pour $n = 1$. En effet, pour $n = 1$, on obtient

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} (6k^2 + 4k + 1) = 11 \qquad \text{et} \qquad 1 \times (2 \times 1^2 + 5 \times 1 + 4) = 11 \qquad ✓$$

Si on reconnaît une somme de référence mais que l'indice ne commence par à 0 ou 1, on ajoute les termes qui manquent pour commencer à l'indice 0 puis on les retranche (pour conserver l'égalité).

Exemple 1.14 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Calculons $S_n = \sum_{\ell=3}^{n}(2\ell - 1)$.

En utilisant la linéarité de la somme et les sommes de référence, on obtient,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{\ell=3}^{n}(2\ell) - \sum_{\ell=3}^{n} 1 \\ &= 2\sum_{\ell=3}^{n} \ell - 1 \times (n-3+1) \\ &= 2(3+4+\cdots+n) - (n-2) \\ &= 2(1+2+3+\cdots+n-1-2) - (n-2) \\ &= 2\left(\sum_{k=1}^{n} k - 3\right) - (n-2) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 6 - n + 2 \\ &= n(n+1) - n - 4 \\ &= n^2 - 4 \end{aligned}$$

Vérification. On peut au moins vérifier que cette formule a un sens pour $n = 3$. En effet, pour $n = 3$, on obtient

$$S_3 = \sum_{\ell=3}^{3}(2\ell - 1) = 2 \times 3 - 1 = 5 \qquad \text{et} \qquad 3^2 - 4 = 5 \qquad \checkmark$$

1.3.b) Sommes télescopiques

Les sommes de la forme

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1})$$

sont appelées des *sommes télescopiques*. Il est facile de les calculer car les termes s'éliminent de proche en proche et il ne reste alors que le premier et le dernier terme.

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - \cancel{u_1} + \cancel{u_1} - \cancel{u_2} + \cancel{u_2} - \cancel{u_3} + \cdots + \cancel{u_{n-1}} - \cancel{u_n} + \cancel{u_n} - u_{n+1} = u_0 - u_{n+1}$$

Proposition 1.15 — Sommes télescopiques. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Soient $u_p, \ldots, u_{q+1}$ des nombres réels. On a :

$$\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{q+1} \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$$

Exemple 1.16 Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{i=0}^{n}(i^2-(i+1)^2) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On reconnaît une somme télescopique. Plutôt que d'appliquer la formule par coeur (au risque de faire des erreurs), on écrit la somme en extension (avec des $\cdots$) pour comprendre quels sont les termes qui se simplifient et ceux qui restent.

En reconnaissant un télescopage, on a,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(i^2-(i+1)^2) &= 0^2-\cancel{1^2}+\cancel{1^2}-\cancel{2^2}+\cdots+\cancel{(n-1)^2}-\cancel{n^2}+\cancel{n^2}-(n+1)^2\\ &= 0^2-(n+1)^2\\ &= -(n+1)^2 \qquad \text{(n=0) } \checkmark\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) &= \cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2}+\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}+\cdots+\cancel{\sqrt{n}}-\cancel{\sqrt{n-1}}+\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}}\\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{2} \qquad \text{(n=2) } \checkmark\end{aligned}$$

1.3.c) Changement d'indices

Il existe plusieurs façons d'écrire une même somme, par exemple

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}$$

Un changement d'indice est une réécriture de la somme avec un nouvel indice.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$\cdots$	$k=n$
$\frac{1}{k+1}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}$

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$\cdots$	$i=n+1$
$\frac{1}{i}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}$

Dans les deux cas, on conserve exactement les mêmes termes dans la somme, on leur donne juste «un nouveau nom». Cela permet notamment de se ramener à des sommes connues. De manière plus rigoureuse, on a effectué le changement d'indice «$i=k+1$».

Proposition 1.17 — Changement d'indice. Soient p et n deux entiers naturels. Soient $u_0,\dots,u_n$ des nombres réels. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}u_k = \sum_{i=p}^{n+p}u_{i-p}$$

Exemple 1.18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes grâce à un changement d'indice.

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1), \qquad \sum_{k=0}^{n}(k+2)^2, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+3}}$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On reconnaît presque des sommes usuelles sauf que l'indice de sommation n'est pas tout à fait le bon. Il faut alors faire un changement d'indices. Plutôt que d'apprendre la formule par coeur, il faut mieux écrire la somme en extension (avec les $\cdots$) pour reconnaître facilement la somme usuelle qu'on essaye de calculer.

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = 0+1+2+\cdots+n-1 = \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2} \qquad \text{(j=k-1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k+2)^2 = 2^2+3^2+\cdots+(n+2)^2 = \sum_{j=2}^{n+2} j^2 = \frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6} - 1 \qquad \text{(j=k+2)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+3}} = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+3}} = \sum_{j=3}^{n+3}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{4}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \qquad \text{(j=k+3)}$$

1.3.d) Regroupement de termes

On peut parfois décomposer la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer.

Exemple 1.19 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $U_n = \sum_{i=0}^{2n} \min(i,n)$.

On sait que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\min(i,n) = \begin{cases} i & \text{si} \quad i = 0,\ldots,n \\ n & \text{si} \quad i = n+1,\ldots,2n \end{cases}$$

Donc, on découpe la somme de la manière suivante,

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=0}^{n}\min(i,n) + \sum_{i=n+1}^{2n}\min(i,n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=n+1}^{2n} n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n\times(2n-(n+1)+1) \\ &= \frac{n(3n+1)}{2} \end{aligned}$$

Vérification. On peut au moins vérifier que cette formule a un sens pour $n=0$. En effet, pour $n=3$, on obtient

$$U_0 = \sum_{i=0}^{0}\min(i,0) = \min(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{0(3\times 0+1)}{2} = 0 \qquad \checkmark$$

2 Produits

On souhaite de même que pour les sommes, avoir une écriture simplifiée et compacte pour la multiplication de nombreux termes.

2.1 Le symbole $\prod$

Définition 2.1 Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$ (p est l'indice de départ du produit, q l'indice de fin). Soient $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_q$ des nombres réels. Le *produit* de tous les termes $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_q$ se note :

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

Cette notation se lit «le *produit* des u_k pour k variant de p à q». Par convention, si $p > q$ (produit vide), on considère que le produit vaut 1.

! L'*indice du produit*, est une *lettre muette* :

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = \prod_{n=p}^{q} u_n = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q.$$

Exemple 2.2 — Du symbole $\prod$ à l'expression développée.

$\prod$	Terme général	Indice 1^er terme	Indice der. terme	Produit avec les $\cdots$
$\prod_{k=1}^{n} 3$	3	$k=1$	$k=n$	$3 \times 3 \times \cdots \times 3 = 3^n$
$\prod_{\ell=3}^{5} \ell^2$	ℓ^2	$\ell=3$	$\ell=5$	$3^2 \times 4^2 \times 5^2 = 3600$
$\prod_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$	$\frac{1}{i}$	$i=1$	$i=4$	$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$
$\prod_{k=2}^{5} b_{10-k}$	b_{10-k}	$k=2$	$k=5$	$b_8 \times b_7 \times b_6 \times b_5$

Exemple 2.3 — De l'expression développée au symbole $\prod$. On a

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) \times \left(1+\frac{1}{3}\right) \times \left(1+\frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{1}{n}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$5^3 \times 6^3 \times 7^3 \times 8^3 = \prod_{\ell=5}^{8} \ell^3$$

Proposition 2.4 — Produit d'une constante. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$ et $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\prod_{k=p}^{q} a = a^{\text{nbre de termes}} = a^{q-p+1}$$

2.2 Règles de manipulation

Proposition 2.5 Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Soient $u_p, \ldots, u_q$ et $v_p, \ldots, v_q$ des nombres réels. On a

$$\prod_{k=p}^{q} (u_k \times v_k) = \prod_{k=p}^{q} u_k \times \prod_{k=p}^{q} v_k$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\prod_{k=p}^{q} (\lambda \cdot u_k) = \lambda^{q-p+1} \cdot \prod_{k=p}^{q} u_k$$

Exemple 2.6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{4^k}{2} = \frac{4^0}{2} \times \frac{4^1}{2} \times \frac{4^2}{2} \times \cdots \frac{4^n}{2} = \frac{4^{0+1+2+\cdots+n}}{2^{n+1}} = \frac{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} = \frac{2^{n(n+1)}}{2^{n+1}} = 2^{(n+1)(n-1)}$$

2.3 Technique de calculs

2.3.a) Produits télescopiques

Les produits de la forme

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

sont appelées des *produits télescopiques*. Il est facile de les calculer car les termes s'éliminent de proche en proche et il ne reste alors que le premier et le dernier terme.

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\cancel{u_1}}{u_0} \times \frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}} \times \frac{\cancel{u_3}}{\cancel{u_2}} \times \cdots \times \frac{\cancel{u_n}}{\cancel{u_{n-1}}} \times \frac{u_{n+1}}{\cancel{u_n}} = \frac{u_{n+1}}{u_0}$$

Proposition 2.7 — Produits télescopiques. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Soient $u_p, \ldots, u_{q+1}$ des nombres réels. On a :

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p} \qquad \text{ou encore} \qquad \prod_{k=p}^{q} \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_p}{u_{q+1}}$$

Exemple 2.8 On a

$$\prod_{k=2}^{7} \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{1}} = \sqrt{n+1}$$

2.3.b) Changement d'indice

Comme pour les sommes, on peut effectuer des changements d'indice dans les produits.

Exemple 2.9 Effectuer dans les deux produits les changements d'indice respectivement données par $i = k-2$ et $j = k+1$

$$\prod_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n-2} = \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i}$$

$$\prod_{k=0}^{12} \sqrt{k+1} = \sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \cdots \times \sqrt{13} = \prod_{j=1}^{13} \sqrt{j}$$

2.4 Factorielle

Définition 2.10 La *factorielle* d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est l'entier

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple 2.11 On a

$0!$	$1!$	$2!$	$3!$	$4!$
1	1	$1 \times 2 = 2$	$1 \times 2 \times 3 = 6$	$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Proposition 2.12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

Exemple 2.13 On a

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120 \\ \tfrac{7!}{5!} &= \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42 \end{aligned}$$

Exemple 2.14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose,

$$Q_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}$$

Exprimer Q_n d'une manière plus compacte, au moyen de factorielles.

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour conjecturer ce qui se passe, on peut regarder pour des petites valeurs de n, par exemple, $n = 3$. Dans ce cas,

$$Q_3 = \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} = \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \times 1 \times 2 \times 3} = \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \times 3!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{2^3 \times 3! \times 2 \times 4 \times 6} = \frac{6!}{(2^3 \times 3!)^2}$$

On conjecture donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_n = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un premier temps, on peut remarquer que

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n = 2^n \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = 2^n \times n!$$

Ainsi,

$$Q_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)}{2^n \times n! \times 2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n)}$$

Donc, en réutilisant la première égalité démontrée plus haut, on obtient,

$$Q_n = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}$$

3 Sommes doubles

3.1 Sommes "rectangulaires"

On veut calculer la somme de tous les nombres $a_{i,j}$ présents dans le tableau suivant :

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$

Il s'agit en fait de calculer une somme de somme, que l'on appelle *somme double*. Cette somme est notée

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} a_{i,j}.$$

On peut sommer de deux manières différentes.

- On somme les éléments par *ligne* :
$$S = (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})+(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}) = \sum_{i=1}^{2}(a_{i,1}+a_{i,2}+a_{i,3}) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\right)$$
- On somme les éléments par *colonne* :
$$S = (a_{1,1}+a_{2,1})+(a_{1,2}+a_{2,2})+(a_{1,3}+a_{2,3}) = \sum_{j=1}^{3}(a_{1,j}+a_{2,j}) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{i,j}\right)$$

Proposition 3.1 Soient $(m,p,n,q)\in\mathbb{N}^4$ et $(a_{i,j})_{m\leqslant i\leqslant n,\, p\leqslant j\leqslant q}$ des nombres réels. On a

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} a_{i,j}\right) = \sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}\right)$$

Exemple 3.2 Calculons

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}} \frac{1}{i+j}.$$

- En sommant par *ligne*, on a :
$$S = \left(\frac12+\frac13\right)+\left(\frac13+\frac14\right)+\left(\frac14+\frac15\right) = \frac{28}{15}$$
- En sommant par *colonne*, on a :
$$S = \left(\frac12+\frac13+\frac14\right)+\left(\frac13+\frac14+\frac15\right) = \frac{28}{15}$$

	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\frac12$	$\frac13$
$i=2$	$\frac13$	$\frac14$
$i=3$	$\frac14$	$\frac15$

Retrouvons ces calculs de manière plus abstraite. Si par exemple, on choisit l'indice de sommation i en premier (sommation par ligne), on obtient

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{i+j}\\ &= \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{1+j}+\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2+j}+\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{3+j}\\ &= \left(\frac12+\frac13\right)+\left(\frac13+\frac14\right)+\left(\frac14+\frac15\right)\\ &= \frac{28}{15}\end{aligned}$$

Calculons
$$S = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i.$$

- En sommant par *ligne*, on a :
$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n}(ni) = \frac{n^2(n+1)}{2}$$
- En sommant par *colonne*, on a :
$$S = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$
$i=1$	1	1	$\cdots$	1
$i=2$	2	2	$\cdots$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$	n	n	$\cdots$	n

3.2 Sommes “triangulaires”

On peut aussi vouloir calculer la somme de tous les nombres $a_{i,j}$ présents dans le tableau suivant, dont toutes les cases ne sont pas remplies :

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$i=2$		$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
$i=3$			$a_{3,3}$

Il s’agit en fait de calculer la somme suivante
$$S = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} a_{i,j}.$$

On peut sommer de deux manières différentes.

- On somme les éléments par *ligne* :
$$S = (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}) + (a_{2,2}+a_{2,3}) + (a_{3,3}) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=i}^{3} a_{i,j}\right)$$
- On somme les éléments par *colonne* :
$$S = (a_{1,1}) + (a_{1,2}+a_{2,2}) + (a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$$

Exemple 3.3 Calculons
$$S = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i.$$

En sommant par *ligne*, on a
$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i(n-i+1) \\ &= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= (n+1)\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$
$i=1$	1	1	$\cdots$	1
$i=2$		2	$\cdots$	2
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
$i=n$				n