DS 1

Vendredi 11 octobre 2024, 13h30 - 16h30

Les règles à respecter sont les suivantes.

- *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*
- *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
- *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

Exercice 1 – *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Résoudre l'équation $2x^2 - 2x - 4 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes par la quantité indiquée.

$$A = x^2 + 6x + 9 \quad \text{à factoriser par } x + 3$$
$$B = 2x - 5 + (2x-5)^2 \quad \text{à factoriser par } 2x - 5$$
$$C = x^2 - 9 + (x-3)(x+1) \quad \text{à factoriser par } x - 3$$

3. Écrire le nombre suivant sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a, b, c sont des entiers (avec c le plus petit possible).
$$A = \sqrt{256} + 4\sqrt{180} - 15 - 5\sqrt{80}.$$
4. Résoudre de manière graphique puis de manière calculatoire l'inéquation $|x-5| < 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les deux quantités suivantes,
$$A = \frac{1}{(\mathrm{e}^{-3})^2} + \frac{(\mathrm{e}^4)^{-1}}{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-6}} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{(\mathrm{e}^{2x})^3}{\mathrm{e}^{3x+1} \times \mathrm{e}^{-x-1}}$$
6. Simplifier les deux quantités suivantes.
$$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5}) \qquad \text{et} \qquad B = \ln(\exp(2)) - \ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$$
7. Pour les trois fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction.
$$f : x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad g : x \mapsto \sqrt{2x+3} \qquad h : x \mapsto \ln(x-3)$$
8. Montrer que la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, où k est définie par,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad k(x) = \frac{x^5}{x^2+1}$$

Exercice 2 – On considère le polynôme P, défini par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^3 + 3x + 4$$

1. Montrer que -1 est une racine du polynôme P.
2. Déterminer le polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+1)Q(x).$$

3. Déterminer les racines éventuelles du polynôme Q.
4. En déduire le tableau de signe du polynôme Q.
5. En déduire le tableau de signe du polynôme P.

On considère maintenant la fonction f donnée par

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$$

6. Donner l'ensemble de définition de la fonction f. *Justifier.*
7. Montrer que la fonction f est ni paire, ni impaire.
8. Déterminer la dérivée de f et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{xP(x)}{(x^2+1)^2}$$

9. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction f. *Les limites ne sont pas demandées.*
10. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.
11. En quel·s point·s, la courbe représentative de la fonction f admet-elle une tangente horizontale ?
12. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
13. Représenter l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3 – Python. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Pour le programme donné ci-dessous, noter dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables, et s'il y un affichage, écrire la valeur affichée.

```python
1 x = 0
2 y = x + 2
3 print(y**2)
4 x = y
```

	Valeur de x	Valeur de y	Affichage
Ligne 1			
Ligne 2			
Ligne 3			
Ligne 4			

2. Pour chaque valeur de `x` donnée, indiquer ce que le programme affiche.

```python
#On suppose la valeur
#de x connue
import numpy as np
if x > 0 :
    print(np.sqrt(x))
elif x == 0 :
    print(2)
else :
    print(x**2+1)
```

x	Affichage
4	
-1	
0	

3. Déterminer ce qu'affiche le programme suivant.

```python
def fct(x,y,z):
    return(x+y, y+z, x+z)

print(fct(1,2,3))
```

4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Définir en Python cette fonction que l'on appellera `fct2` et écrire la commande permettant d'afficher la valuation de la fonction en $x = 2$.

5. Écrire une fonction, appelée `minimum`, qui prend en argument deux nombres et qui renvoie le plus petit de ces deux nombres. Afficher son évaluation au point $(101, 100)$.

Exercice 4 – On considère le système linéaire suivant,

$$(S_k)\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (k^2-5)z = k \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et où $k \in \mathbb{R}$ désigne un paramètre.

1. Résoudre le système dans le cas particulier où $k = -2$.
2. Résoudre le système dans le cas particulier où $k = 2$.
3. Dans cette question, on suppose que $k \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.
   (a) Montrer, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, que le système (S_k) est équivalent au système échelonné suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ (k^2-4)z = k-2 \end{cases}$$

   (b) En déduire que le système (S_k) admet une unique solution à déterminer (en fonction du paramètre k).