

DEVOIR MAISON 1

À rendre pour le lundi 04 novembre 2024

- **Les résultats finaux doivent être mis en évidence (soulignés, surlignés ou encadrés).**

Exercice 1 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. (a) Calculer u_0, u_1 et u_2 .
 (b) Représenter (sans utiliser le calcul fait à la question précédente) sur le graphe en annexe 1 les termes u_0, u_1 et u_2 .
 (c) À partir du graphe, que peut-on conjecturer sur la monotonie et le caractère borné de la suite ?
2. Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 2]$.
3. Le but de cette question est de démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

On pourra utiliser la relation de récurrence et multiplier par la quantité conjuguée.

- (b) Tracer le tableau de signe du polynôme $x \mapsto -x^2 + x + 2$.
- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 2 – Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Calculer les trois sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \quad S_2 = \sum_{k=3}^n (2k+1) \quad S_3 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)$$

Tester chacun de vos résultats sur une/des petites valeurs de n ($n = 1$ pour S_1 et S_3 et $n = 3$ pour S_2).

Exercice 3 – Python – Exercice 1 Algo 4. Écrire les commandes Python correspondantes aux instructions suivantes.

1. Créer une liste L1 contenant les éléments 4, 7, 12, 11 et 8 dans cet ordre.
2. Afficher le nombre d'éléments dans la liste L1.
3. Afficher le premier élément de L1.
4. Afficher le dernier élément de L1.
5. Afficher le troisième élément de L1 (le 12).
6. Afficher la portion de liste [7,12] à partir de L1.
7. Ajouter un 13 à la fin de L1.
8. Vérifier, avec un booléen, que 13 est dans la liste.
9. Supprimer le 13.
10. Vérifier, avec un booléen, que 13 n'est plus dans la liste.
11. Modifier le deuxième élément (le 7) pour qu'il soit égal à -1 .
12. Afficher la liste.

Vous devez vérifier, grâce au site Basthon, que votre code fonctionne bien, avant de le recopier sur votre feuille.

Exercice 4 – Bonus. Corriger votre copie du DS1.

Annexe 1, à rendre avec la copie**Nom Prénom :**