TD 07 – Suites

Exercice 1 – Récurrences en vrac. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 11$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n$. Montrer par récurrence que
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 11 \times 5^n$$
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{6}{10}v_n + 2$. Montrer par récurrence que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad 3 < v_n < 5$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Montrer par récurrence que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2 – Calcul des termes d'une suite. Dans chaque cas, donner les quatre premiers termes des suites suivantes.

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$v_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + 2^n.$$
3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$w_0 = 1, \qquad w_1 = -2 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_n - w_{n+1}.$$

1) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{3}{5}$, $u_3 = \frac{4}{7}$

2) $v_0 = 2$, $v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 9$

3) $w_0 = 1$, $w_1 = -2$, $w_2 = 4$, $w_3 = -8$

Exercice 3 – Monotonie d'une suite. Étudier le sens de variation des suites de termes généraux suivants, définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par,

1) $u_n = 5 - 3^n$ *(Méthode 1)*

2) $u_n = n - n^2$ *(Méthode 1)*

3) $u_n = \frac{n-1}{n+2}$ *(Méthode 1)*

4) $u_n = \frac{2^n}{n}$ *(Méthode 2)*

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2 \times 3^n \leqslant 0$
Donc $(u_n)_n$ décroissante

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2n \leqslant 0$
Donc $(u_n)_n$ décroissante

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{(n+3)(n+2)} \geqslant 0$
Donc $(u_n)_n$ croissante

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$
Donc $(u_n)_n$ croissante

Exercice 4 – Monotonie d'une suite. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-x) - 1$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

1. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 – Suites bornées. Étudier le caractère borné des suites suivantes *(on pourra représenter graphiquement les premiers termes de la suite pour conjecturer le caractère majoré/minoré/borné de la suite).*

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$,

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{2n}$,

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$,

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = |(-1)^n| = 1$ donc la suite $(u_n)_n$ est bornée.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2}$ donc la suite $(v_n)_n$ est bornée.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|w_n| = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq w_n \leq 1$. Donc la suite (w_n) est bornée.

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|z_n| = \left|\frac{1}{n} + (-1)^n\right| \leq \frac{1}{n} + 1 \leq 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-2 \leq z_n \leq 2$
Donc la suite $(z_n)_n$ est bornée.

Exercice 6 – Suites arithmétiques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

$$1)\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} = u_n + 3 \end{array}\right.$$
$$2)\left\{\begin{array}{l} u_0 = -2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} = u_n - 4 \end{array}\right.$$
$$3)\left\{\begin{array}{l} u_0 = -\frac{1}{5} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + 3n$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2 - 4n$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{5} + \frac{n}{2}$

Exercice 7 – Suites géométriques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

$$1)\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = 7u_n \end{cases}$$
$$2)\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$$
$$3)\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = \frac{1}{11}u_n \end{cases}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 7^n$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times (-3)^n$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4 \times \left(\frac{1}{11}\right)^n$

Exercice 8 – Suites arithmético-géométriques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{4} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 - 4^n$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 9 – Suites récurrences linéaires d'ordre 2. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

$$1)\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 9 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1 + 17n)\frac{1}{2^n}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, On ne peut pas conclure

Exercice 10 – On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Préciser sa valeur.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Déterminer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n := v_n - u_n$

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_{n+1} - w_n = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 = 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$

$= 3u_n + 2(1 + u_n)$

$= 5u_n + 2$

Donc $(u_n)_n$ arith.-géo

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}$

(Voir DM)

Exercice 11 – Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante grâce à un raisonnement par récurrence.

Exercice 12 – Extrait Ecricome 2018.

1. On note
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
   (a) Montrer que $\varphi > 1$.
   (b) Montrer que les réels φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation suivante
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$
   Justifier qu'il existe des réels A et B tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\varphi^n + B\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$