TD 08 – Calcul Matriciel (II)

Exercice 1 – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^3 - 4A^2 - 9A$.
2. Montrer qu'il existe une matrice non nulle B carrée d'ordre 3 telle que $AB = 0_3$.
3. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 2 – EM Lyon 2009. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Déterminer les solutions de l'équation $B^2 = A$ d'inconnue $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 – Soit

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que le polynôme $P : x \mapsto x^2 - 6x + 9$ est un polynôme annulateur de A, autrement dit que,
$$A^2 - 6A + 9I_2 = 0_2.$$
2. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $x \mapsto x^n$ par le polynôme P.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n.

Exercice 4 – Adaptation de l'épreuve EDHEC 2003. Dans ce sujet, on se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_2 = 1,$$

et par la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour cela, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.$$
(b) Montrer que
$$(A - I_3)^2(A - 2I_3) = 0_3.$$
2. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)^2(x-2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, fixé dans toute cette question.
(a) Justifier l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x).$$
(b) On admet que le polynôme R_n est de la forme,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + (2^n - n - 1)(x-1)^2.$$
En évaluant la relation de la question 2(a) en $x = 1$, montrer que $a_n = 1$.
(c) De manière similaire, montrer que $b_n = n$.
3. On admet que la question précédente permet de montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = I_3 + n(A - I_3) + (2^n - n - 1)(A - I_3)^2.$$
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression matricielle de A^n.
4. (a) En utilisant la relation de la question 1(a), montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 5 – Adaptation de l'épreuve Ecricome 2009. À tout triplet (a,b,c) de réels, on associe la matrice $M(a,b,c)$ définie par

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ où a,b,c sont des réels. Ainsi

$$E = \{M(a,b,c) |\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1. Description de l'ensemble E.

1. La matrice B suivante appartient-elle à l'ensemble E ? Justifier.
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On considère les trois matrices suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que les trois matrices M_1, M_2 et M_3 appartiennent à l'ensemble E.
   (b) On suppose qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0_3.$$

   Montrer que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   (c) Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $M(a,b,c) \in E$. Montrer qu'il existe trois réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$M(a,b,c) = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3.$$

2. Cas particulier de la matrice $M(1,2,3)$. On considère la matrice P donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que P est inversible.
2. Montrer que,

$$\forall B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \text{ l'équation } PX = B \text{ admet une unique solution.}$$

   En déduire P^{-1}.
3. Montrer que la matrice $D = P^{-1}M(1,2,3)P$ est une matrice diagonale.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[M(1,2,3)]^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire l'expression de la matrice $[M(1,2,3)]^n$ en fonction de l'entier naturel n.

3. Cas particulier de la matrice $M(1,1,1)$. On pose

$$J = M(1,1,1) - I_3.$$

1. Calculer les matrices J^2, J^3.
2. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$[M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

   Pour résoudre cette question, on admet que lorsque deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ commutent, c'est-à-dire lorsque $AB = BA$, la formule du binôme de Newton est valable, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

   On pourra également utiliser la question 2 pour simplifier la somme.

4. L'égalité obtenue à la question précédente est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ et $n = 1$?
5. En déduire l'écriture matriciellle de $[M(1,1,1)]^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 6 – Type concours. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la ou les valeurs de c pour lesquelles $M(c) = I_2$.
2. Démontrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$.
3. On suppose que $a \neq 1/2$. Montrer que la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer en fonction de a le réel b tel que $M(b) = M(a)^{-1}$.
4. La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?
5. Déterminer l'unique réel non nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$.
6. On considère maintenant les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.
   (a) Calculer P^2, PQ et QP et Q^2. *On donnera les résultats en fonction des matrices P et Q ou de la matrice nulle.*
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$.