

TD 08 – CALCUL MATRICIEL

Exercice 1 – Écriture de matrices. Écrire en extension les deux matrices suivantes, puis donner leur taille et l'espace $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dans lequel elles vivent.

$$A = (i \times j)_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 4}} \quad \text{et} \quad B = (\min(i, j))_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$$

Exercice 2 – Opérations sur les matrices. On considère les deux matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $3A - B$, $2I_2 + A$ et $3(A - 2B)$.

Exercice 3 – Multiplication de matrices. Calculer les produits suivants

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{b)} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{c)} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \text{d)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{e)} & (-1 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{f)} & \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (-1 \ 0 \ 2) \end{aligned}$$

Exercice 4 – Gare aux identités remarquables chez les matrices... On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Que constate-t-on ?
2. Calculer $A^2 - B^2$ et $(A + B)(A - B)$. Que constate-t-on ?

Exercice 5 – Opérations sur les matrices. Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Développer les expressions matricielles suivantes.

$$\text{i) } A(B + C) \quad \text{ii) } (A + B)^2 \quad \text{iii) } A(A^2 + B + I_n)$$

2. Factoriser les expressions matricielles suivantes.

$$\text{i) } M^2 + 3M + MA \quad \text{ii) } AM - 2M \quad \text{iii) } M^3 + 3M^2 - 2M$$

Exercice 6 – Transposée de matrices. Donner la transposée des trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = (-1 \ 0 \ 2).$$

Exercice 7 – Puissances d'une matrice. Soient a, b et c des réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n .

Exercice 8 – Puissances d'une matrice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n .

Exercice 9 – Puissances d'une matrice. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 + \frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & -\frac{a^2}{2} & 1 - \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$$

1. Calculer U^2 .
2. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \alpha I_3 + \beta U + \gamma U^2$.

Exercice 10 – Matrices inversibles, cas particuliers. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 – Matrices inversibles.

1. Montrer que la matrice suivante est inversible et donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. En déduire (sans faire le pivot de Gauss !) que le système suivant admet une unique solution que l'on donnera,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

Exercice 12 – Matrices symétriques. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que si B est symétrique alors $A^T B + BA$ est symétrique.
3. Montrer que si A et B sont symétriques, alors $A + B$ est symétrique.

Exercice 13 – (*) Polynômes annulateurs.

1. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3$.
 - (b) En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que $A^2 = 6A$.
- (b) En raisonnant par l'absurde, en déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 14 – (*) Diagonalisation. On considère les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n .
4. Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n .

Exercice 15 – (*) Lien avec les suites récurrentes d'ordre 2, Problème Classique. On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1. (a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

(b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
- (b) Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
- (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n .
- (d) Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
- (e) En déduire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

- (f) En déduire les valeurs de u_n et v_n en fonction de n .
- (g) Étudier les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.