DS 1

Vendredi 11 octobre 2024, 13h30 - 16h30

Exercice 1 – *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Résoudre l'équation $2x^2 - 2x - 4 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   L'équation $2x^2 - 2x - 4 = 0$ est une équation de second degré. Pour la résoudre, on commence par calculer son discriminant qui est donné par

   $$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 4 + 32 = 36$$

   Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles données par

   $$x_1 = \frac{2+\sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{2+6}{4} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{2-6}{4} = -1$$

   Donc, finalement, l'équation $2x^2 - 2x - 4 = 0$ admet $\boxed{\text{deux solutions}}$ réelles données par $\boxed{2 \text{ et } -1.}$

   Vérification.

   $$2 \times 2^2 - 2 \times 2 - 4 = 0 \quad \checkmark$$
   $$2 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) - 4 = 0 \quad \checkmark$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes par la quantité indiquée.

   a) $A = x^2 + 6x + 9$ à factoriser par $x + 3$

   b) $B = 2x - 5 + (2x-5)^2$ à factoriser par $2x - 5$

   c) $C = x^2 - 9 + (x-3)(x+1)$ à factoriser par $x - 3$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

   $$\begin{aligned} \boxed{A} &= x^2 + 6x + 9 \\ &\boxed{= (x+3)^2} \end{aligned}$$

   Et

   $$\begin{aligned} \boxed{B} &= 2x - 5 + (2x-5)^2 \\ &= (2x-5)(1 + 2x - 5) \\ &\boxed{= (2x-5)(2x-4)} \end{aligned}$$

   Et enfin,

   $$\begin{aligned} \boxed{C} &= x^2 - 9 + (x-3)(x+1) \\ &= (x-3)(x+3) + (x-3)(x+1) \\ &\boxed{= (x-3)(2x+4)} \end{aligned}$$

3. Écrire le nombre suivant sous la forme $a+b\sqrt{c}$ où a,b,c sont des entiers (avec c le plus petit possible).

$$A=\sqrt{256}+4\sqrt{180}-15-5\sqrt{80}.$$

On a,

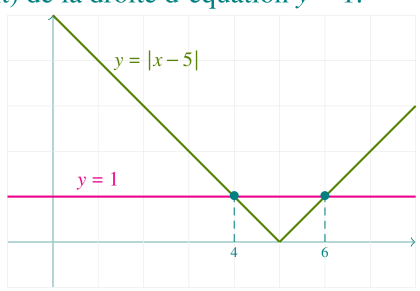
$$\begin{aligned}A&=\sqrt{256}+4\sqrt{180}-15-5\sqrt{80}\\&=\sqrt{16^2}+4\sqrt{2^2\times3^2\times5}-15-5\sqrt{2^2\times2^2\times5}\\&=16+4\times2\times3\sqrt{5}-15-5\times2\times2\times\sqrt{5}\\&=1+24\sqrt{5}-20\sqrt{5}\\&=1+4\sqrt{5}\end{aligned}$$

4. Résoudre de manière graphique puis de manière calculatoire l'inéquation $|x-5|<1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

- **Résolution graphique.** On peut commencer par remarquer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad |x-5|=\begin{cases}x-5 & \text{si } x\geqslant 5\\ -x+5 & \text{si} x<5\end{cases}$$

Ceci nous permet de représenter la courbe de la fonction $x\mapsto|x-5|$. Puis, graphiquement résoudre l'inéquation $|x-5|<1$ revient à déterminer l'ensemble des abscisses pour lesquelles la courbe de la fonction $x\mapsto|x-5|$ est en-dessous (strictement) de la droite d'équation $y=1$.



Graphiquement, on trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-5|<1$ est donné par $]4,6[$.

- **Résolution analytique.** Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$|x-5|<1 \quad\Longleftrightarrow\quad -1<x-5<1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4<x<6.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-5|<1$ est donné par $]4,6[$.

5. Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier les deux quantités suivantes,

$$A=\frac{1}{(\mathrm{e}^{-3})^2}+\frac{(\mathrm{e}^4)^{-1}}{\mathrm{e}^2\times\mathrm{e}^{-6}}\qquad\text{et}\qquad B=\frac{(\mathrm{e}^{2x})^3}{\mathrm{e}^{3x+1}\times\mathrm{e}^{-x-1}}$$

On a :

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{(\mathrm{e}^{-3})^2}+\frac{(\mathrm{e}^4)^{-1}}{\mathrm{e}^2\times e^{-6}}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^{-6}}+\frac{\mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-4}}\\&=\mathrm{e}^6+1\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} B &= \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} \\ &= \frac{e^{6x}}{e^{2x}} \\ &= e^{6x-2x} \\ &= e^{4x} \end{aligned}$$

6. Simplifier les deux quantités suivantes.

$$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5}) \qquad \text{et} \qquad B = \ln(\exp(2)) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

On a

$$\begin{aligned} A &= \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5}) \\ &= \ln\Big((3-\sqrt{5}) \times (3+\sqrt{5})\Big) \\ &= \ln\Big(3^2 - (\sqrt{5})^2\Big) \\ &= \ln(9-5) \\ &= \ln(4) \end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} B &= \ln(\exp(2)) - \ln\left(\frac{2}{e}\right) \\ &= 2 - (\ln(2) - \ln(e)) \\ &= 2 - \ln(2) + 1 \\ &= 3 - \ln(2) \end{aligned}$$

7. Pour les trois fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction.

$$f : x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad g : x \mapsto \sqrt{2x+3} \qquad h : x \mapsto \ln(x-3)$$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = 6x - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

La fonction g est définie sur $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$. Elle est dérivable sur $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[, \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

La fonction h est définie et dérivable sur $]3, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]3, +\infty[, \qquad h'(x) = \frac{1}{x-3}$$

8. Montrer que la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, où k est définie par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad k(x) = \frac{x^5}{x^2+1}$$

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad k(-x) = -k(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} k(-x) &= \frac{(-x)^5}{(-x)^2+1} \\ &= \frac{-x^5}{x^2+1} \\ &= -\frac{x^5}{x^2+1} \\ &= -k(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction k est impaire.

Exercice 2 – On considère le polynôme P, défini par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^3 + 3x + 4$$

1. Montrer que -1 est une racine du polynôme P.

   On a
   $$P(-1) = (-1)^3 + 3 \times (-1) + 4 = -1 - 3 + 4 = 0.$$
   Donc -1 est une racine du polynôme P.

2. Déterminer le polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+1)Q(x).$$

   Effectuons la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $x \mapsto x + 1$.
   $$\begin{array}{rrr|l}
   x^3 & & +3x+4 & x+1 \\ \cline{4-4}
   -x^3 & -x^2 & & x^2 - x + 4 \\ \cline{1-2}
   & -x^2 & +3x & \\
   & x^2 & +x & \\ \cline{2-3}
   & & 4x+4 & \\
   & & -4x-4 & \\ \cline{3-3}
   & & 0 &
   \end{array}$$
   Comme le reste de cette division euclidienne est nulle, on obtient que,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+1)Q(x)$$
   où le polynôme Q est défini par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q(x) = x^2 - x + 4$$

3. Déterminer les racines éventuelles du polynôme Q.

   Le polynôme Q est un polynôme du second degré. On commence donc par calculer son discriminant Δ qui vaut
   $$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15$$
   Comme $\Delta < 0$, le polynôme Q n'admet pas de racines réelles.

4. En déduire le tableau de signe du polynôme Q.

   Comme le polynôme Q n'admet pas de racines réelles, il est de signe constant. Comme son coefficient dominant est strictement positif, on en déduit que le polynôme Q est toujours strictement positif sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, le tableau de signe de Q est donné par,

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$Q(x)$	$+$

5. En déduire le tableau de signe du polynôme P.

D'après la Question 2, le polynôme P s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+1)(x^2 - x + 4).$$

À partir de cette forme factorisée et grâce au tableau de signe de Q donné à la Question 4, on obtient le tableau de signe suivant pour le polynôme P.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

On considère maintenant la fonction f donnée par

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$$

6. Donner l'ensemble de définition de la fonction f. *Justifier.*

   Comme

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + 1 \neq 0,$$

   la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

7. Montrer que la fonction f est ni paire, ni impaire.

   Tout d'abord, on peut calculer que

   $$f(1) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad f(-1) = -\frac{3}{2}$$

   - Comme $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.
   - Comme $-f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

8. Déterminer la dérivée de f et montrer que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{xP(x)}{(x^2+1)^2}$$

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

   $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3-2) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x(x^3 + 3x + 4)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{xP(x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

   en utilisant la définition du polynôme P donnée à la Question au début de l'Exercice 2.

9. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *Les limites ne sont pas demandées.*

D'après la Question 8, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{xP(x)}{(x^2+1)^2}$$

Donc, en utilisant le tableau de signe de P déterminé à la Question 5, on obtient le tableau de signe suivant pour f' et donc le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

10. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation

$$y = f'(1)(x-1) + f(1).$$

Or,

$$f(1) = -\frac{1}{2}$$

et en utilisant le résultat de la Question 8, on obtient que

$$f'(1) = 2$$

Donc, finalement, l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse -2 est donnée par

$$y = 2(x-1) - \frac{1}{2} = 2x - \frac{5}{2}$$

11. En quel·s point·s, la courbe représentative de la fonction f admet une tangente horizontale ?

D'après la Question 9, la courbe représentative de la fonction f admet une tangente horizontale aux points d'abscisses -1 et 0 car ce sont les points où la dérivée s'annule (et la dérivée correspond donne le coefficient directeur de la tangente associée, et une droite est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul).

12. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} - x \\ &= \frac{x^3 - 2 - x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^3 - 2 - x^3 - x}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-2 - x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

On peut donc en déduire le tableau de signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

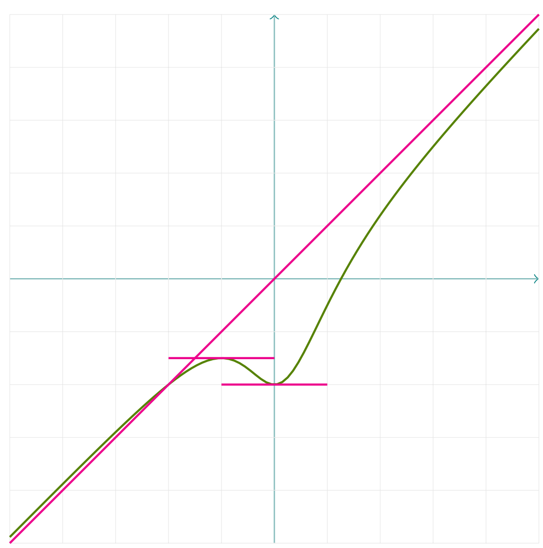
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$-2 - x$		$+$	0	$-$	
$x^2 + 1$		$+$		$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant x$, autrement dit de l'inéquation $f(x) - x \geqslant 0$, est donné par

$$]-\infty, -2].$$

13. Représenter l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

Grâce aux informations ci-dessus, on peut en déduire l'allure suivante pour la courbe de f.



Exercice 3 – Python. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Pour le programme donné ci-dessous, noter sur votre feuille, dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables, et s'il y un affichage, écrire la valeur affichée.

```python
1 x = 0
2 y = x + 2
3 print(y**2)
4 x = y
```

	Valeur de x	Valeur de y	Affichage
Ligne 1	0		
Ligne 2	0	2	
Ligne 3	0	2	4
Ligne 4	2	2	

2. Pour chaque valeur de x donnée, indiquer ce que le programme affiche.

```python
#On suppose la valeur
#de x connue
import numpy as np
if x > 0 :
    print(np.sqrt(x))
elif x == 0 :
    print(2)
else :
    print(x**2+1)
```

x	Affichage
4	2
-1	2
0	2

3. Déterminer ce qu'affiche le programme suivant.

```python
def fct(x,y,z):
    return(x+y, y+z, x+z)

print(fct(1,2,3))
```

Python va afficher `(3,5,4)`.

4. On considère la fonction (mathématique) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Définir en Python cette fonction que l'on appellera `fct2` et écrire la commande permettant d'afficher la valuation de la fonction en $x = 2$.

```python
import numpy as np

def fct2(x):
    if x<=0:
        return(0)
    else:
        return(np.log(x))

print(fct2(2))
```

5. Écrire une fonction, appelée `minimum`, qui prend en argument deux nombres et qui renvoie le plus petit de ces deux nombres. Afficher son évaluation au point $(101, 100)$.

```
def minimum(a,b):
    if a<=b:
        return(a)
    else:
        return(b)

print(minimum(101,100))
```

Exercice 4 – On considère le système linéaire suivant,

$$(S_k)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & (k^2-5)z & = & k \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et où $k \in \mathbb{R}$ désigne un paramètre.

1. Résoudre le système dans le cas particulier où $k = -2$.

   Prenons $k = -2$ et raisonnons par équivalence pour résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss.

   $$(S_{-2})\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

   La dernière ligne est incompatible. Le système admet donc aucune solution.

2. Résoudre le système dans le cas particulier où $k = 2$.

   Prenons $k = 2$ et raisonnons par équivalence pour résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss.

   $$(S_{2})\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

   La dernière ligne n'apporte aucune information, on peut la supprimer. Ainsi,

   $$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

   On se retrouve avec plus d'inconnues que d'équations. On choisit deux inconnues principales, par exemple x et y, que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante z. Comme le système est échelonné, on le résout de bas en haut. On obtient alors,

   $$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & & & y & = & 1-2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1+3z \\ y & = & 1-2z \end{array}\right.$$

   Le système admet donc une infinité de solutions, données par,

   $$(1+3z, 1-2z, z) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}.$$

3. Dans cette question, on suppose que $k \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$.
   (a) Montrer, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, que le système (S_k) est équivalent au système échelonné suivant :

   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & (k^2-4)z & = & k-2 \end{array}\right.$$

   On fera clairement apparaître les opérations élémentaires effectuées.

Soit $k \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$. Raisonnons par équivalence pour résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss.

$$(S_k)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & (k^2-5)z & = & k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 & \\ & & y & + & 2z & = & 1 & L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ & & & & (k^2-4)z & = & k-2 & L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

(b) En déduire que le système (S_k) admet une unique solution à déterminer (en fonction du paramètre k).

Soit $k \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$. D'après la question précédente, on a,

$$(S_k) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & (k^2-4)z & = & k-2 \end{array}\right.$$

Comme $k \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$, $k^2-4 \neq 0$. On peut donc diviser par cette quantité dans la dernière ligne puis simplifier car $k^2-4=(k-2)(k+2)$. Puis résoudre le système de bas en haut car le système est échelonné.

$$\begin{aligned} (S_k) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & z & = & \frac{1}{k+2} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & & & y & = & \frac{k}{k+2} \\ & & & & z & = & \frac{1}{k+2} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{k+5}{k+2} \\ y & = & \frac{k}{k+2} \\ z & = & \frac{1}{k+2} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Donc le système admet une unique solution donnée par le triplet

$$\left(\frac{k+5}{k+2}, \frac{k}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)$$