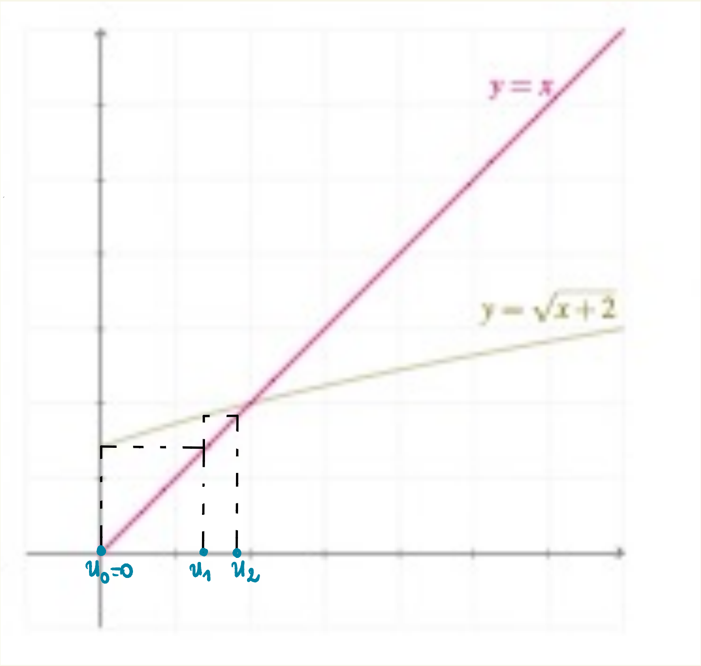
# EXERCICE 1

1. a) On a $u_0 = 0$ (d'après l'énoncé)

$u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2}$ en utilisant la formule de récurrence.

et $u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

b)




c) Conjectures à partir du graphe

- la suite est croissante
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$

2\. · Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ : " $u_n \in [0,2]$ "

·· Initialisation : Mque $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_0 \in [0,2]$

On a $u_0 = 0$ d'après l'énoncé

Donc $u_0 \in [0,2]$

Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

·· Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c-à-d que $u_n \in [0,2]$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c-à-d que $u_{n+1} \in [0,2]$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$0 \leq u_n \leq 2$

donc, $2 \leq u_n + 2 \leq 4$

donc $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n+2} \leq 2$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ car $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$ d'après l'énoncé.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

·· Conclusion : Par principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$$

3a). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n$$

$$= \left(\sqrt{2+u_n} - u_n\right) \frac{\sqrt{2+u_n} + u_n}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$

$$= \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$

b) Commenşons par résoudre l'équation $-x^2 + x + 2 = 0$

· Comme c'est une équation du second degré, on peut commencer par calculer son discriminant

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$$

· Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions données par

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2 \times -1} = \frac{-1+3}{-2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2} = 2$$

On peut en déduire le tableau de signe du polynôme $x \mapsto -x^2 + x + 2$

| | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$ et pour tout $x \in [0,2]$, $-x^2+x+2 \geqslant 0$ cf question 2 — cf question 3b)

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_n^2 + u_n + 2 \geqslant 0$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2+u_n} + u_n \geqslant 0$ car $u_n \geqslant 0$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2+u_n+2}{\sqrt{2+u_n}+u_n} \geqslant 0$ (cf question 3a))

Donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

# EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

. On a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} 2^k \times 2 = 2\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 \times 2^1 \times \frac{1-2^{n+1-1}}{1-2} = 4(2^n-1)$$

▶ Vérif (pour $n=1$)

- $\sum_{k=1}^{1} 2^{k+1} = 2^{1+1} = 4$ ✓ (les deux termes coïncident)
- $4(2^1-1) = 4$

---

. On a :

$$S_2 = \sum_{k=3}^{n}(2k+1) = \sum_{k=3}^{n}(2k) + \sum_{k=3}^{n} 1 = 2\sum_{k=3}^{n} k + 1\times(n-3+1) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k - 1 - 2\right) + n-2 = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 3\right) + n - 2 = n(n+1) - 6 + n - 2 = n^2+2n-8$$

▶ Vérif (pour $n=3$)

- $\sum_{k=3}^{3}(2k+1) = 2\times3+1 = 7$ ✓
- $3^2+2\times3-8 = 7$

---

. On a :

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+2}} - \frac{1}{n+3}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$ par télescopage

▶ Vérif (pour $n=1$) :

- $\sum_{k=1}^{1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
- $\frac{1}{3} - \frac{1}{1+4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ✓

## Exercice 1

1. Créer une liste L1 contenant les éléments 4, 7, 12, 11 et 8 dans cet ordre.

Entrée [8]:
```
L1 = [4, 7, 12, 11, 8]
```

2. Afficher le nombre d'éléments dans la liste L1.

Entrée [9]:
```
len(L1)
```

Out [9]:
```
5
```

3. Afficher le premier élément de L1.

Entrée [10]:
```
L1[0]
```

Out [10]:
```
4
```

4. Afficher le dernier élément de L1.

Entrée [11]:
```
L1[len(L1)-1]
```

Out [11]:
```
8
```

5. Afficher le troisième élément de L1 (le 12).

Entrée [12]:
```
L1[2]
```

Out [12]:
```
12
```

6. Afficher la portion de liste [7,12] à partir de L1.

Entrée [13]:
```
L1[1:3]
```

Out [13]:
```
[7,12]
```

7. Ajouter un 13 à la fin de L1.

Entrée [14]:
```
L1.append(13)
```

8. Vérifier, avec un booléen, que 13 est dans la liste.

Entrée [15]:
```
13 in L1
```

Out [15]:
```
True
```

9. Supprimer le 13.

Entrée [16]:
```
L1.pop()
```

10. Vérifier, avec un booléen, que 13 n'est plus dans la liste.

Entrée [17]:
```
13 in L1
```

Out [17]:
```
False
```

11. Modifier le deuxième élément (le 7) pour qu'il soit égal à $-1$.

Entrée [18]:
```
L1[1] = -1
```

12. Afficher la liste.

Entrée [19]:
```
print(L1)
```

Out [19]:
```
[4,-1, 12,11,8]
```