Interrogation du 16/11/2026

1. La matrice est de taille 2×2. On calcule donc son déterminant:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \times 4 - 1 \times 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Comme $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification:

$$\begin{aligned} A \times A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2. La matrice A est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc la matrice A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vérification:

$$\begin{aligned} A \times A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. on a:

$$
\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y+2z = a \\ x+y+2z = b \\ 2y+3z = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z = b \\ y+2z = a \\ 2y+3z = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z = b \\ y+2z = a \\ -z = c-2a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z = b \\ y = 2c-3a \\ z = -c+a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a+b \\ y = -3a+2b \\ z = 2a-c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -a+b \\ -3a+2c \\ 2a-c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc l'équation $AX = B$ admet une unique solution donnée par

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} -a+b \\ -3a+2c \\ 2a-c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc la matrice A est inversible et son inverse ett donné par

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$