TD 8 – CALCUL MATRICIEL

Exercice 1 – Écriture de matrices. Écrire en extension les deux matrices suivantes, puis donner leur taille et l'espace $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dans lequel elles vivent.

$$A = (i \times j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 5 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4}} \quad \text{et} \quad B = (\min(i,j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 4 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – Opérations sur les matrices. On considère les deux matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $3A - B$, $2I_2 + A$ et $3(A - 2B)$.

- $3A - B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$
- $2I_2 + A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- $3(A - 2B) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 3 – Multiplication de matrices. Calculer les produits suivants

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$ f) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4 – Gare aux identités remarquables chez les matrices.... On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Que constate-t-on ?
2. Calculer A^2-B^2 et $(A+B)(A-B)$. Que constate-t-on ?

1. $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ alors que $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ alors que $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 5 – Opérations sur les matrices. Soient A, B, C trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Développer les expressions matricielles suivantes.

$$\text{i) } A(B+C) \qquad \text{ii) } (A+B)^2 \qquad \text{iii) } A(A^2+B+I_n)$$

2. Factoriser les expressions matricielles suivantes.

$$\text{i) } M^2+3M+MA \qquad \text{ii) } AM-2M \qquad \text{iii) } M^3+3M^2-2M$$

1. i) $A(B+C) = AB + AC$

ii) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

iii) $A(A^2+B+I_n) = A^3 + AB + A$

2. i) $M^2 + 3M + MA = M(M + 3I_n + A)$

ii) $AM - 2M = (A - 2I_n)M$

iii) $M^3 + 3M^2 - 2M = M(M^2 + 3M - 2I_n)$

$= (M^2 + 3M - 2I_n)M$

Exercice 6 – Transposée de matrices. Donner la transposée des trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $C^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 7 – Puissances d'une matrice. Soient a, b et c des réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

(à démontrer par récurrence)

Exercice 8 – Puissances d'une matrice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

$A^0 = I_3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \left(\begin{matrix} 3^{n-1} \\ 3^{n-1} \\ 3^{n-1} \end{matrix} \right.$

(à démontrer par récurrence)

Exercice 9 – Puissances d'une matrice. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1+\frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & -\frac{a^2}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$$

1. Calculer U^2.
2. Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \alpha I_3 + \beta U + \gamma U^2$.

1. $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $M = I_3 + aU + \frac{a^2}{2} U$

Exercice 10 – Matrices inversibles, cas particuliers. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

a) Inversible (car det $= 6 \neq 0$) et son inverse vaut $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) Pas inversible (det $= 0$)

c) Pas inversible (matrice diagonale car un zéro sur la diagonale)

d) Inversible et son inverse vaut (matrice diagonale avec tous ses coeff diagonaux non nuls)

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

e) Inversible (mais a priori on ne connait pas son inverse) (matrice triangulaire avec tous ses coeff diagonaux non nuls)

f) Pas inversible. (matrice triangulaire supérieure car un zéro sur la diagonale)

Exercice 11 – Matrices inversibles.

1. Montrer que la matrice suivante est inversible et donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. En déduire (sans faire le pivot de Gauss !) que le système suivant admet une unique solution que l'on donnera,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

1. Montrons que A est inversible en montrant que $\forall B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = B$ (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) admet une unique solution.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalence.

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

en effectuant le produit matriciel et en identifiant les coefficients des matrices

$$\iff \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = b \\ x + 2z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = b \\ -y = b - 2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y + z = c - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = b \\ y = 2a - b \\ -y + z = c - a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = b \\ y = 2a - b \\ z = a - b + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2a + 2b - c \\ y = 2a - b \\ z = a - b + c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -2a + 2b - c \\ 2a - b \\ a - b + c \end{pmatrix}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc $\forall B$, l'éq $AX = B$ admet une unique sol donnée par

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} B$$

Donc la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

▸ Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \checkmark$$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence.

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

car A est inversible d'après la question 1

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en utilisant l'expression de A^{-1} trouvée à la question 1

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc le système (S) admet une unique solution donnée par $(5, -1, -3)$

▶ Vérification :

$$\begin{cases} 5 - 1 - 3 = 1 \checkmark \\ 2 \times 5 - 1 + 2 \times (-3) = 3 \checkmark \\ 5 + 2 \times (-3) = -1 \checkmark \end{cases}$$

Exercice 12 – Matrices symétriques. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que si B est symétrique alors $A^T B + BA$ est symétrique.
3. Montrer que si A et B sont symétriques, alors $A + B$ est symétrique.

1. On a :

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T$$
$$= A^T A$$

Donc $A^T A$ est symétrique.

2. On a :

$$(A^T B + BA)^T = (A^T B)^T + (BA)^T$$
$$= B^T (A^T)^T + A^T B^T$$
$$= B^T A + A^T B^T$$
$$= BA + A^T B$$
$$= A^T B + BA$$

car B est symétrique c-à-d $B^T = B$

Donc $A^T B + BA$ est symétrique.

3. On a :

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$= A + B$$

car A et B sont symétriques

Donc $A + B$ est symétrique.

Exercice 13 – ($\star$) Polynômes annulateurs.

1. On considère la matrice A suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3$.
   (b) En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. On considère la matrice A suivante
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que $A^2 = 6A$.
   (b) En raisonnant par l'absurde, en déduire que A n'est pas inversible.

1. (a) Calculs...

(b) Raisonnons par équivalence. On a :

$$A^3 - A^2 + 2A + 11 I_3 = 0_3 \iff A^3 - A^2 + 2A = -11 I_3$$
$$\iff A(A^2 - A + 2I_3) = -11 I_3$$
$$\iff A \times \left(-\frac{1}{11}(A^2 - A + 2I_3)\right) = I_3$$

Ainsi, il existe
$$B = -\frac{1}{11}(A^2 - A + 2I_3)$$
telle que $AB = I_3$.

Donc la matrice A est inversible et
$$A^{-1} = -\frac{1}{11}(A^2 - A + 2I_3)$$

2. (a) Calculs...

(b) Raisonnons par l'absurde.
Supposons par l'absurde que la matrice A est inversible.
D'après la question précédente, on a
$$A^2 = 6A$$
Donc
$$A^2 \times A^{-1} = 6A \times A^{-1}$$ (licite car A est supposée inversible)
Donc
$$A = 6I_3$$
Or cette égalité est absurde.
Donc A n'est pas inversible.

Exercice 14 – (⋆) Diagonalisation. On considère les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
4. Montrer par récurence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n.

1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 15 – ($\star$) Lien avec les suites récurrentes d'ordre 2, Problème Classique. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1. (a) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
   (d) Montrer par récurence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (e) En déduire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

   (f) En déduire les valeurs de u_n et v_n en fonction de n.
   (g) Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.