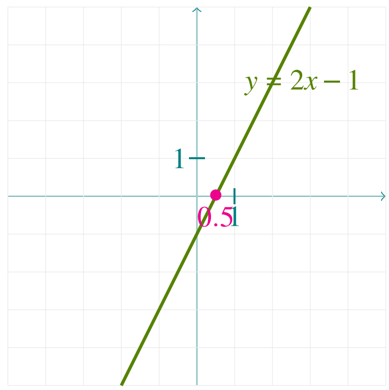
DS 0 (Correction)

Vendredi 12 septembre, 13h30 - 14h30

Exercice 1 – 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2x - 1 = 0$ de manière graphique.

Résoudre l'équation $2x - 1 = 0$ revient graphiquement à trouver l'abscisse du point d'intersection entre la droite d'équation $y = 2x - 1$ et l'axe des abscisses.



Graphiquement, on trouve que l'équation $2x - 1 = 0$ admet une unique solution donnée par 0.5.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $4x + 7 = 0$ (de manière calculatoire).

Raisonnons par *équivalence* pour résoudre l'équation $4x + 7 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 4x + 7 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 4x = -7 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

Donc l'équation $4x + 7 = 0$ admet une unique solution donnée par $-\frac{7}{4}$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

L'équation $2x^2 - 7x + 6 = 0$ est une équation de second degré. Pour la résoudre, on commence par calculer son discriminant qui est donné par

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (6) = 49 - 48 = 1$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles données par

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{7 + 1}{4} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{7 - 1}{4} = 1.5$$

Donc, finalement, l'équation $2x^2 - 2x - 4 = 0$ admet deux solutions réelles données par 2 et 1.5.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = (2x + 3)(x - 2) - 2x(x + 1)$

b) $B = (x + 2)^2 - (2x - 3)^2$

c) $C = (2x - 1)(x + 1)(x - 2)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{A} &= (2x+3)(x-2) - 2x(x+1) \\ &= 2x^2 - 4x + 3x - 6 - 2x^2 - 2x \\ &\boxed{= -3x - 6}\end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned}\boxed{B} &= (x+2)^2 - (2x-3)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 - (4x^2 - 12x + 9) \\ &\boxed{= -3x^2 + 16x - 5}\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}\boxed{C} &= (2x-1)(x+1)(x-2) \\ &= (2x^2 + x - 1)(x-2) \\ &\boxed{= 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}\end{aligned}$$

$\boxed{5.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes par la quantité indiquée.

a) $A = x^2 - 4x + 4$ à factoriser par $x - 2$

b) $B = 2x - 10 + (x-5)^2$ à factoriser par $x - 5$

c) $C = x^2 - 1 + (x-3)(x+1)$ à factoriser par $x + 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}\boxed{A} &= x^2 - 4x + 4 \\ &\boxed{= (x-2)^2}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\boxed{B} &= 2x - 10 + (2x-5)^2 \\ &= 2(x-5) + (2x-5)^2 \\ &= (2x-5)(2 + 2x - 5) \\ &\boxed{= (2x-5)(2x-3)}\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}\boxed{C} &= x^2 - 1 + (x-3)(x+1) \\ &= (x-1)(x+1) + (x-3)(x+1) \\ &\boxed{= (x+1)(2x-4)}\end{aligned}$$

6. Calculer les fractions suivantes.

a) $A = \dfrac{7}{2} + \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{5}$ b) $B = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{4}{5}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}$

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{A} &= \frac{7}{2} + \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{7}{2} + \frac{8}{15} \\ &= \frac{105}{30} + \frac{16}{30} \\ &\boxed{= \tfrac{121}{30}} \end{aligned}$$

Et aussi,

$$\begin{aligned} \boxed{B} &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{5}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{\frac{5}{10}+\frac{8}{10}}{\frac{9}{6}-\frac{4}{6}} \\ &= \frac{\frac{13}{10}}{\frac{5}{6}} \\ &= \frac{13}{10} \times \frac{6}{5} \\ &\boxed{= \tfrac{39}{25}} \end{aligned}$$

7. Donner l'expression la plus simple des expressions suivantes (sous forme d'une seule fraction) en précisant pour chacune les valeurs de x autorisées.

a) $A = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2x+1}$ b) $B = \dfrac{x+5}{3x-1} - \dfrac{3}{5x-3}$

a) La quantité A est définie pour des $x \in \mathbb{R}$ tels que $2x+1 \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{A} &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2x+1} \\ &= \frac{3 \times (2x+1) + 2 \times 3}{2(2x+1)} \\ &\boxed{= \tfrac{6x+9}{4x+2}} \end{aligned}$$

b) La quantité B est définie pour des $x \in \mathbb{R}$ tels que $3x-1 \neq 0$ et $5x-3 \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\}$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{B} &= \frac{x+5}{3x-1} - \frac{3}{5x-3} \\ &= \frac{(x+5)(5x-3)-3(3x-1)}{(3x-1)(5x-3)} \\ &\boxed{= \frac{5x^2+13x-12}{15x^2-14x+3}} \end{aligned}$$

8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $X^4 - 2X^2 - 3 = 0$.

Raisonnons par *analyse-synthèse*.

- **Analyse.** Soit $X \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation $X^4-2X^2-3=0$. Posons $x = X^2$. Alors $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $x^2-2x-3=0$. qui est une équation du second degré. cette équation admet exactement deux solutions données par 3 et -1. Donc

  $$\text{soit } x = 3 \qquad \text{soit} \qquad x = -1$$

  En revenant à la variable initiale, on obtient

  $$\text{soit } X^2 = 3 \qquad \text{soit} \qquad X^2 = -1$$

  L'équation $X^2 = 3$ admet deux solutions données par $X = \sqrt{3}$ et $X = -\sqrt{3}$. L'équation $X^2 = -1$ quant à elle n'admet aucune solution. Donc finalement, on obtient,

  $$\text{soit } X = \sqrt{3} \qquad \text{soit} \qquad X = -\sqrt{3}$$

- **Synthèse.** Vérifions que $X = \sqrt{3}$ et $X = -\sqrt{3}$ sont bien des solutions de l'équation $X^4-2X^2-3=0$. On a,

  $$\begin{aligned} (\sqrt{3})^4 - 2\times(\sqrt{3})^2 - 3 = 9-6-3 = 0 \\ (-\sqrt{3})^4 - 2\times(-\sqrt{3})^2 - 3 = 9-6-3 = 0 \end{aligned}$$

  Donc $X = \sqrt{3}$ et $X = -\sqrt{3}$ sont bien des solutions de l'équation $X^4-2X^2-3 = 0$.

- **Conclusion.** L'équation $X^4-2X^2-3=0$ admet exactement $\boxed{\text{deux solutions}}$ données par $\boxed{\sqrt{3} \text{ et } -\sqrt{3}.}$

Exercice 2 – - Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3 \\ f(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[\\ f(x) \geqslant 2 &\Leftrightarrow x \in [-1, 0] \end{aligned}$$

Comme le polynôme P
- est de degré 2
- admet 1 et -2 comme racines (d'après le graphique) il est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x-1)(x+2)$$

où a est son coeff dominant (réel) à déterminer. or d'après le graphique,

$$P(0) = 2$$

Donc $a \in \mathbb{R}$ doit nécessairement vérifier

$$a \times (0-1)(0+2) = 2$$
$$ie \quad a = -1.$$

Finalement, le polynôme P est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = -(x-1)(x+2)$$

Avec la forme factorisée on retrouve:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$
Puis,
$f(x) < 0 \Leftrightarrow -(x-1)(x+2) < 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = -(x+2)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On retrouve donc, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$
Résolution de $f(x) \geq 2$

$$-x^2 + x + 2 \geq 2$$

On simplifie :

$$-x^2 + x \geq 0$$

Le membre de gauche de l'inégalité correspond à un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et -1 avec pour coefficient dominant -1
Ce polynôme est du signe du coefficient dominant sauf entre les racines. donc:
$f(x) \geqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-1, 0]$

Exercice 3 – 1. Soit $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\begin{cases} r + s = -4 \\ r \times s = -12 \end{cases}$$

Alors r et s sont les racines du polynôme suivant:

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} P(x) &= x^2 - (r+s)x + r \times s \\ &= x^2 + 4x - 12 \end{aligned}$$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant:
- on a $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 64$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par:

$$\frac{-4+\sqrt{64}}{2} = \frac{-4+8}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-4-\sqrt{64}}{2} = \frac{-4-8}{2} = -6$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par:

$$S = \{(2, -6), (-6, 2)\}$$

Exercice 4 – On considère le polynôme P donné par: pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = 2x^3 - 14x + 12$
1 . Comme P est de degré 3 , il peut admettre au plus trois racines distinctes.
2. On a :

$$P(1) = 3 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$$

donc 1 est une racine de P.
3. On cherche un polynôme Q tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)Q(x)$
- Alors nécessairement, Q et un polynôme de degré 2 donc on peut le chercher sous la forme pour tout $x \in \mathbb{R}, Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x-1)Q(x) &= (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x-1)Q(x)$$

si et seulement si a, b, c sont solutions de

$$\begin{cases} a &= 2 \\ -a+b &= 0 \\ -b+c &= -14 \\ -c &= 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = -12 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = 2x^2 + 2x - 12$$

4. D'après la Question 2, on a

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)Q(x) = (x-1) \times \left(2x^2 + 2x - 12\right)$$

Donc il reste seulement à regarder les racines de Q. Comme Q et un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant:
- on a $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times -12 = 4 + 96 = 100$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme Q n' admet deux racines réelles.

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{100}}{2 \times 2} = \frac{-2 + 10}{4} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{100}}{2 \times 2} = \frac{-2 - 10}{4} = -3$$

Donc P admet 3 racines réelles: 1, 2 et -3
4. On utilise la forme factorisée de P pour dresser son tableau de signe.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) = 2(x-1)(x-2)(x+3)$$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$			
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $P(x) \geqslant 0$ sur $[-3;1] \cup [2;+\infty[$