TD 09 – Limite d'une suite

Exercice 1 – Limites de référence et opérations (sans FI). Étudier les limites des suites suivantes.

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 2n - 9$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \frac{1}{n^3} - \frac{6}{n}$

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3-e^{2n}}$

4) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 2^n\left(-1 + \frac{3}{\sqrt{\ln(n)}}\right)$

5) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\ln n)^2 \times 5^n}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{-3} + n^5 + 6 + e^{-n}$

7) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{2+\frac{1}{\ln n}}{-1+\frac{1}{n}}$

8) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^3 - 3n^2 - 2n + 1$

9) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n} - 1$

10) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{-1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{e^{-n}+\frac{1}{n^2}}$

Exercice 2 – Limites de référence et opérations (avec FI). Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ suivantes.

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+1}{1-4n}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3^n}{n^2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} + n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(3n)}{\sqrt{n}}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{2+e^{-n}\ln(n)}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

7) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+2} - n$

8) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\ (1 < b < a)$

Exercice 3 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3-u_n}.$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, au vu de la Question 1, que doit vérifier la limite ℓ ?
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   (d) En déduire l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (f) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-ce cohérent avec le résultat de la Question 2(b) ?

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = -2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$.
2. Montrer que cette suite est croissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
4. Déterminer la valeur de cette limite.
5. Déterminer le terme général de la suite. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 5 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_1 = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 25.$$

En reprenant la méthode de l'exercice précédent, démontrer de deux manières différentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel à déterminer.

Exercice 6 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^4.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. En déduire qu'il existe seulement que deux comportements possibles pour la convergence de la suite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = 0$. *(On pourra utiliser la relation de récurrence de la suite.)*
5. À l'aide des deux questions précédentes, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 – Théorème d'encadrement. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par

$$\forall n \geqslant 2, \qquad u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n!}$$

1. Démontrer que,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{3} u_n.$$
2. En déduire que,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-2} u_2.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

Exercice 8 – Théorème d'encadrement. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n^2}\left(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor\right)$$

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x, notée $\lfloor x\rfloor$, est l'unique entier vérifiant

$$x - 1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$$

1. Démontrer que,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x(1+2+\cdots+n) - n \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor \leqslant x(1+2+\cdots+n)$$
2. En déduire que,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{xn(n+1)}{2n^2}$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel à déterminer.

Exercice 9 – Encadrement avec la valeur absolue. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0 où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^n + 2}{n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{(-1)^n(1+n)}{n^2}$$

Exercice 10 – Suites adjacentes. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes. En déduire que les deux suites sont convergentes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 11 – Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Démontrer que,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 12 – Limite et suite récurrente. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer la somme suivante
$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}-u_k)$$
4. En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Retrouver le résultat de la question 2.

Exercice 13 – Limite et suite récurrente. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \prod_{k=0}^{n} (1+\mathrm{e}^{-k})$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\ln(u_n) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$
   (On pourra utiliser que, pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant 0$.)
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 14 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite (sans symbole somme) de $u_{n+1}-u_n$ à l'aide d'un changement d'indice.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.