Interrogation du 12/11/2024

NOM Prénom :

1. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$$

La suite $(u_n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- On commence par étudier l'équation caractéristique associée :
  $r^2 = -r + 2 \iff r^2 + r - 2 = 0$
  C'est une équation du second ordre. On calcule son discriminant :
  $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2)$
  $= 9$
  Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles :
  $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$
- Donc il existe deux constantes A et B telles que
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \times 1^n + B \times (-2)^n$
  $= A + B \times (-2)^n$
- Or
  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ A - 2B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ -3B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$
- Donc
  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (-2)^n}$

Vérification :

$n = 0$: $u_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (-2)^0$
$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 1$
$= 0$ ✓

$n = 1$: $u_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (-2)$
$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$
$= 1$ ✓

Tournez la page ➔

2. On considère les deux matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit AB est-il possible ? Si oui, le calculer. Le produit BA est-il possible ? Si oui, le calculer.

- Le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.
  Donc on ne peut pas effectuer le produit AB.
- Le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A.
  Donc on peut effectuer le produit BA et il vaut

$$\boxed{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}$$

3. Donner l'affichage du programme suivant.

```
L=[1,3,5]
for k in range(0,3):
    print(k)
    print(L[k])
```

Le programme affiche

```
0
1
1
3
2
5
```