TD ?? – Limite d'une suite

Exercice 1 – Limites de référence et opérations (sans FI). Étudier les limites des suites suivantes.

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 2n - 9$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \frac{1}{n^3} - \frac{6}{n}$

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3 - e^{2n}}$

4) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 2^n \left(-1 + \frac{3}{\sqrt{\ln(n)}}\right)$

5) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\ln n)^2 \times 5^n}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{-3} + n^5 + 6 + e^{-n}$

7) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{2 + \frac{1}{\ln n}}{-1 + \frac{1}{n}}$

8) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^3 - 3n^2 - 2n + 1$

9) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n} - 1$

10) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{-1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{e^{-n} + \frac{1}{n^2}}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1 = (-1+0+0)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \left(= \frac{1}{\infty}\right)$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \left(= +\infty(-1+0)\right)$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \left(\frac{3+0}{\infty \times \infty}\right)$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \left(= 0 + \infty + \infty + 0\right)$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2 \left(= \frac{2+0}{-1+0}\right)$
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
9. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
10. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \left(= \frac{-1+0}{0^+ + 0^+}\right)$

Exercice 2 – Limites de référence et opérations (avec FI). Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ suivantes.

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+1}{1-4n}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3^n}{n^2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} + n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(3n)}{\sqrt{n}}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{2+\mathrm{e}^{-n}\ln(n)}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

7) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+2} - n$

8) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\ (1 < b < a)$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{-4n\left(\frac{1}{4n}-1\right)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1+\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n}-1}$
FI ∞/∞

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ $\left(= -\frac{1}{2}\ \frac{1+0}{0-1}\right)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{3^n}{n^2}$
FI ∞/∞

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (" 3^n gagne sur n^2 ")

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\lim\limits_{n+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n+\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
FI ∞/∞ pour le 1^{er} terme
$0\times\infty$ pour le $2^{ième}$ terme

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{\ln 3}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
FI ∞/∞

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (" $\sqrt{n}$ gagne sur $\ln n$ ")

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\lim\limits_{n+\infty} n+(-1)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n+\infty} e^{-n}\ln(n) = 0$
FI $0\times\infty$ au dénominateur

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$
FI ∞/∞

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (" $n^{3/2}$ gagne sur $(\ln n)^2$ ")

7) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \left(\sqrt{n^2+2} - n\right) \frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n}$
FI $+\infty-\infty$
$= \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}$
$= \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

8) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{a^n \times \left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n \times \left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$
FI ∞/∞ (et $+\infty-\infty$ au num)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ $\left(= \frac{1-0}{1+0}\right)$

Exercice 3 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3-u_n}.$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0<u_n<1$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n-1}$.
   (a) Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}$, au vu de la Question 1, que doit vérifier la limite ℓ ?
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   (d) En déduire l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (f) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-ce cohérent avec le résultat de la Question 2(b) ?

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: " $0<u_n<1$ ".

•• Initialisation : Mq $\mathcal{P}(1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0<u_1<1$.

On a $u_1 = \frac{u_0+1}{3-u_0} = \frac{0+1}{3-0} = \frac{1}{3}$

Donc $u_1 = \frac{1}{3} \in]0,1[$

Donc $\mathcal{P}(1)$ vraie.

•• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c-à-d que $0<u_n<1$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c-à-d que $0<u_{n+1}<1$.

On sait que $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3-u_n}$.

On* $0<u_n<1$ donc

* par hyp de rec

$1<u_n+1<2$

et $2<3-u_n<3$

donc $\frac{1}{3} < \frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{2}$

car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\frac{1}{3}\times 1 < \frac{u_n+1}{3-u_n} < \frac{1}{2}\times 2$

c-à-d $\frac{1}{3} < u_{n+1} < 1$

donc $0 < u_{n+1} < 1$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

•• Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0<u_n<1$.

2. a) D'après la question 1, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\neq 1$
et on a aussi $u_0\neq 1$. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, v_n existe.

b) Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0<u_n<1$,
si $(u_n)_n$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}$ alors
$0\leq \ell \leq 1$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n-1}$

$= \frac{1}{\frac{u_n+1}{3-u_n}-1} - \frac{1}{u_n-1}$

$= \frac{3-u_n}{u_n+1-(3-u_n)} - \frac{1}{u_n-1}$

$= \frac{3-u_n}{-2+2u_n} - \frac{1}{u_n-1}$

$= \frac{3-u_n-2}{2(u_n-1)}$

$= \frac{1-u_n}{2(u_n-1)}$

$= -\frac{1}{2}$

Donc $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

d) Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$v_n = v_0 - \frac{n}{2}$

$= -1-\frac{n}{2}$

$= -\frac{n+2}{2}$

e) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$u_n = \frac{1}{v_n}+1$

$= -\frac{2}{n+2}+1$

f) Donc la suite $(u_n)_n$ cv et

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = -2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$.
2. Montrer que cette suite est croissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
4. Déterminer la valeur de cette limite.
5. Déterminer le terme général de la suite. Retrouver le résultat de la question précédente.

1. Récurrence (...)
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 3 \\ &\geqslant -\frac{1}{2}\times 6 + 3 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

en utilisant la question 1

Donc la suite est croissante.

3. La suite $(u_n)_n$ est :
   * majorée (par 6)
   * croissante

   Donc par théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_n$ admet une limite finie que l'on note ℓ.

4. D'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

Donc en passant à la limite, on obtient

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 3$$

c-a-d $\frac{1}{2}\ell = 3$

c-a-d $\ell = 6$.

Donc la suite $(u_n)_n$ cv vers 6.

5. La suite $(u_n)_n$ est arithmético-géométrique.
   En déroulant la méthode, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

Donc la suite $(u_n)_n$ cv vers 6 car

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1$$

Exercice 5 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_1 = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 25.$$

En reprenant la méthode de l'exercice précédent, démontrer de deux manières différentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel à déterminer.

Exercice 6 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^4.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. En déduire qu'il existe seulement que deux comportements possibles pour la convergence de la suite.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = 0$. *(On pourra utiliser la relation de récurrence de la suite.)*
5. À l'aide des deux questions précédentes, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :
$u_{n+1} - u_n = u_n^4 \geqslant 0$
Donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

2. Comme la suite $(u_n)_n$ est croissante,
   - soit $(u_n)_n$ est majoré et la suite converge vers un nombre réel ℓ
   - soit la suite diverge vers $+\infty$.

3. Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \geqslant 1$ ".
   - Initialisation : Mque $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_0 \geqslant 1$
   On a $u_0 \geqslant 1$
   Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.
   - Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$.
   On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c-à-d que $u_n \geqslant 1$
   Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c-à-d que $u_{n+1} \geqslant 1$
   On a $u_{n+1} = u_n + u_n^4$.
   Or $u_n \geqslant 1$ par hyp de recurrence
   donc $u_n^4 \geqslant 1$ car $x \mapsto x^4$ croissante sur $\mathbb{R}^+$
   donc $u_n + u_n^4 \geqslant 2$
   donc $u_{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1$.
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : Par principe de récurrence,
   pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

4. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$,
comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^4$
en passant à la limite, on obtiendrait $\ell = \ell + \ell^4$ et donc $\ell = 0$.

5. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$,
   - d'après la question 4, nécessairement $\ell = 0$
   - d'après la question 3, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ et donc en passant à la limite, $\ell \geqslant 1$

   Ceci est contradictoire. Donc $(u_n)_n$ ne peut pas converger vers un $\ell\in\mathbb{R}$.

6. En utilisant les questions 2 et 5, on obtient que nécessairement, la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.