# Interrogation du 18/11/2024

**NOM Prénom :**

1. La matrice suivante $A$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice est de taille 2x2.
On calcule donc son déterminant :

$$\det A = 1 \times 4 - 1 \times 2 = 2$$

Comme $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \checkmark$$

2. La matrice suivante $A$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc la matrice A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \checkmark$$

Tournez la page ➔

3. On considère la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Soit
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$
Montrer que l'équation $AX = B$ admet une unique solution. En déduire que $A$ est inversible et donner l'inverse de $A$.

On a :

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ z = c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$$

Donc l'équation $AX = B$ admet une unique solution donnée par

$$X = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc la matrice $A$ est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I_3 \quad ✓$$