TD 05 – Systèmes linéaires

Exercice 1 – Vrai/Faux autour du cours. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont fausses, on exhibera un contre-exemple.

1. Tout système linéaire a le même nombre d'inconnues que d'équations.
   ☐ Vrai ☐ Faux
2. Tout système linéaire homogène admet au moins une solution.
   ☐ Vrai ☐ Faux
3. Tout système linéaire non homogène admet au moins une solution.
   ☐ Vrai ☐ Faux
4. Tout système linéaire homogène admet une unique solution.
   ☐ Vrai ☐ Faux
5. Tout système linéaire non homogène admet une unique solution.
   ☐ Vrai ☐ Faux

Résolution de systèmes échelonnés

__Énoncé__ : Résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 5 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

__Solution__ : On reconnaît un système échelonné. On le résout de *bas en haut*.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 5 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & \boxed{1} & = & 5 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & & & & y & = & 2 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & \boxed{2} & - & 2\times\boxed{1} & = & 1 \\ & & & & y & = & 2 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de ce système est donné par

$$\{(1,2,1)\}.$$

Exercice 2 – Résoudre les systèmes suivants.

1) $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & \frac{4}{5}z & = & 1 \\ & & y & + & 6z & = & \frac{2}{3} \\ & & & & 4z & = & -2 \end{array}\right.$$

Résolution par méthode du pivot de Gauss

Énoncé : Résoudre le système suivant.

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & - & 10y & + & 2z & = & -3 \end{array}\right.$$

Solution : On utilise la méthode du pivot de Gauss.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{-x} & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 5 \\ & - & 4y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & \boxed{2y} & + & z & = & 5 \\ & & & & z & = & 13 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & & & y & = & -4 \\ & & & & z & = & 13 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -23 \\ y & = & -4 \\ z & = & 13 \end{array}\right.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de ce système est donné par

$$\{(-23,-4,13)\}.$$

Exercice 3 – Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -1 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2u & + & 1 & = & 3v \\ 4u & + & 6v & = & 4 \end{array}\right.$

Exercice 4 – Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 8x & + & 2y & - & 2z & = & 9 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & - & 2w & = & 10 \\ u & + & 9 & + & 4w & = & -v \\ -14 & + & 5v & + & w & = & -7u \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 7c & - & 3b & = & -4 \\ a & + & 2b & - & 3c & = & 6 \\ 7a & + & 4b & - & c & = & 22 \end{array}\right.$

Exercice 5 – Nombre différent d'équations et d'inconnues. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & -1 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & - & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 5z & = & 13 \\ x & + & 4y & + & z & = & 18 \end{array}\right.$

Exercices approfondis

Exercice 6 – Avec un autre formalisme. Trouver les $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$x+y = y+z = z+t = t+x.$$

Exercice 7 – 4 équations et 5 inconnues. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & t & + & w & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & - & t & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & - & t & + & 2w & = & 0 \\ 4x & - & 2y & + & 6z & - & 3t & + & 3w & = & 0 \end{array}\right.$$